Aufgabe 10.1 (**Kurzfragen**)

Korrektur der Lösung der Plenarübung
Diese Aufgabe und die Lösungen sind nicht klausurrelevant.

c) Beweisen oder widerlegen Sie: Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in $[a, b]$ injektiv, genau dann wenn sie dort streng monoton fallend oder streng monoton steigend ist.

Lösung
„$\Rightarrow$" Sei f stetig aber weder streng monoton steigend noch streng monoton fallend. Zu zeigen ist: f ist nicht injektiv (Kontraposition).
Ohne Einschränkung sei die Funktion im Intervall $[a, a+\varepsilon_1]$ zunächst streng monoton steigend. Alternativ könnte sie konstant sein, und somit direkt nicht injektiv, oder streng monoton fallend und der Beweis wäre analog.

Es gibt nun ein c im Inneren von $[a, b]$, sodass f in $[c, c + \varepsilon_2]$ kleiner oder gleich $f(c)$ sein muss. Gäbe es dieses nicht, dann wäre f auf ganz $[a, b]$ streng monoton steigen – Widerspruch. Man beachte: $\varepsilon_2 \neq 0$, denn c liegt im Inneren von $[a, b]$.

In beiden Fällen (kleiner oder gleich) ist die Injektivität verletzt.

„$\Leftarrow$" Aus der strengen Monotonie folgt natürlich direkt die Injektivität.

Bemerkung: Diese Lösung funktioniert leider nicht so, wie ich mir das gedacht habe. Vielen Dank an die Studenten, denen dies aufgefallen ist. Ein Gegenbeispiel wäre:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x\sin(\frac{1}{x}) & x > 0. \end{cases}$$

Diese ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Betrachtet man aber nun das Intervall $[0, b]$, dann bekommt man Probleme mit der Aussage „Ohne Einschränkung [...] zunächst streng monoton steigend." Denn dies ist nun nicht mehr entscheidbar. Bei diesem Gegenbeispiel könnte man zwar die Argumentation vom rechten Rand aus starten. Aber man kann das Konstruktionsprinzip des Gegenbeispiels auch dort (und im Inneren) weiterführen.

Es gibt drei alternative Lösungsmöglichkeiten. Lösung 3 verwendet Hilfsmittel der Analysis 2.

Lösungskizze 1:
Man zeigt zunächst, dass für jede stetige, injektive Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathrm{im}(f) = [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$$

Der Beweis verwendet den Zwischenwertsatz in $\mathbb{R}$.

Im Fall $f(a) < f(b)$ gilt für ein beliebiges $x \in (a, b)$ dann:

$$f|_{[a,x]} = (f(a), f(x))$$

Da x beliebig ist folgt daraus, dass f streng monoton wachsend ist. Analog für $f(b) > f(a)$.

Lösungskizze 2:
Man zeigt zunächst, dass für eine stetige und *nicht* streng monotone Funktion f drei Elemente $x, y, z \in [a, b]$ existieren mit $x < y < z$, sodass:

$$\begin{aligned} & f(x) < f(y) \text{ und } f(y) > f(z) \\ \text{oder} \quad & f(x) > f(y) \text{ und } f(y) < f(z). \end{aligned}$$

Widerspruchsbeweis und Injektivität verwenden.

Dieses Resultat verwendet man nun wiefolgt.
Angenommen f sei injektiv, stetig aber nicht streng monoton. Dann gibt es $x, y, z \in [a, b]$ sodass eine der beiden Eigenschaften erfüllt ist. Angenommen die erste ist erfüllt. Dann existieren nach dem Zwischenwertsatz $c_1 \in (x, y)$ und $c_2 \in (y, z)$ mit:

$$f(c_1) = f(c_2) = \frac{f(y) - \max\{f(x), f(z)\}}{2}.$$

Somit kann f nicht injektiv sein.
Der ZWS wurde auf beiden Intervallen angewandt und der Funktionswert (max ...) geeignet gewählt.

Analog im Falle, dass die zweite Eigenschaft erfüllt ist. Somit wurde „$\Rightarrow$“ gezeigt.

Lösung 3:
Wir betrachten das „Dreieck“ $D = \{(x, y) \in [a, b]^2 \ : \ x < y\} \subset \mathbb{R}^2$ und darauf die Funktion:

$$\begin{aligned} \tilde{f}: \quad D \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x) - f(y). \end{aligned}$$

Diese besitzt nun einige Eigenschaften die aus der Konstruktion folgen:

- $\tilde{f}$ ist stetig in D, als Komposition der stetigen Funktionen $f_1 : D \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x)$ und $f_2 : D \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto -f(y)$.
- f ist injektiv $\Leftrightarrow 0 \notin \operatorname{im}(\tilde{f})$.
- f ist streng monoton fallend $\Leftrightarrow \operatorname{im}(\tilde{f}) \subset \mathbb{R}_{>0}$.
- f ist streng monoton steigend $\Leftrightarrow \operatorname{im}(\tilde{f}) \subset \mathbb{R}_{<0}$.

Mit dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen mehrerer Veränderlicher gilt damit:

$$0 \notin \operatorname{im}(\tilde{f}) \Leftrightarrow \big(\operatorname{im}(\tilde{f}) \subset \mathbb{R}_{>0} \text{ oder } \operatorname{im}(\tilde{f}) \subset \mathbb{R}_{<0}\big). \tag{10.1}$$

Erklärung: Die Aussage des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genauso wie im 1-dimensionalen Fall: Ist D geeignet, dann nimmt g für je zwei Punkte $a, b \in D$ jeden Wert zwischen $g(a)$ und $g(b)$ in D an.

Geeignet ist in diesem Fall zusammenhängend. Was das genau heißt wird dann in Analysis 2 geklärt.

Die Implikation $\Rightarrow$ von (10.1) kann über Kontraposition gezeigt werden: Wenn die 'rechte Seite' nicht erfüllt ist, dann gibt es ein $a \in D$ mit $\tilde{f}(a) < 0$ und ein $b \in D$ mit $\tilde{f}(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann ein $c \in [a, b]$ mit $\tilde{f}(c) = 0$, also ist damit $0 \in \operatorname{im}(\tilde{f})$. Das ist gerade die Negation der 'linken Seite'.

Die Implikation $\Leftarrow$ von (10.1) folgt direkt.

Jetzt verwenden wir noch die anderen Eigenschaften die oben aufgelistet wurden und erhalten die Aussage der Aufgabe:

$$f \text{ ist injektiv } \Leftrightarrow \big(f \text{ ist streng monoton steigend oder } f \text{ ist streng monoton fallend}\big).$$