Übungen zur Linearen Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat
Dr. Dörte Beigel
Philipp Siehr

Blatt 10
Abgabetermin: Freitag, 16.01.2015, 11 Uhr

Lösungen der Zusatzaufgaben von Blatt 10. Bei Fragen zu diesen Lösungen wenden Sie sich bitte an Ihre Tutoren. Die Aufgaben A10.11 und A10.12 werden in der Plenarübung am 12.01.2015 besprochen.

Aufgabe 10.5 (**Spuroperator I**)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist der Spuroperator wiefolgt definiert:

$$\operatorname{spur} : K^{n\times n} \to K, \qquad A \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Mit der üblichen Notation für Matrizen $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.
Zeigen Sie:

a) Die spur ist eine lineare Abbildung.

b) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times m}$ gilt: $\operatorname{spur}(AB) = \operatorname{spur}(BA)$.

c) Sind $A \in K^{n\times n}$ und $B \in K^{n\times n}$ ähnlich, so gilt $\operatorname{spur}(A) = \operatorname{spur}(B)$.

d) Aus $\operatorname{char}(K) = 0$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in K^{n\times n}$, dass $AB - BA \neq E_n$. Wobei E_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix ist.

e) Finden Sie ein Gegenbeispiel für diese Aussage, wenn $\operatorname{char}(K) > 0$.

f) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit n verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Bemerkung: In einem Ring oder Körper ist die Charakteristik die kleinste natürliche Zahl $n > 0$, sodass

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = 0.$$

Ist dies für kein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, dann wird die Charakteristik auf 0 gesetzt.
Beispiele: $\operatorname{char}(\mathbb{F}_p) = p$ und $\operatorname{char}(\mathbb{R}) = 0$.

Lösung
Sei im folgenden A, B zu den jeweiligen Aufgabenteilen passend gewählt.

a) Sei $\alpha \in K$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{spur}(\alpha A + B) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{ii} + b_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\ &= \alpha \operatorname{spur}(A) + \operatorname{spur}(B).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\operatorname{spur}(AB) &= \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} \\ &= \operatorname{spur}(BA)\end{aligned}$$

c) Wenn A und B ähnlich sind, dann gibt es eine reguläre Matrix $P \in K^{n \times n}$ mit $B = P^{-1}AP$. Mit Aufgabenteil b) folgt dann direkt:

$$\begin{aligned}\operatorname{spur}(B) &= \operatorname{spur}(P^{-1}AP) = \operatorname{spur}(P^{-1}(AP)) \\ &= \operatorname{spur}((AP)P^{-1}) = \operatorname{spur}(APP^{-1}) = \operatorname{spur}(A).\end{aligned}$$

d) Es gilt $\operatorname{spur}(E_n) = n$, sofern die Charakteristik von K nicht endlich ist. Weiter ist:

$$\operatorname{spur}(AB - BA) = \operatorname{spur}(AB) - \operatorname{spur}(BA) = \operatorname{spur}(AB) - \operatorname{spur}(AB) = 0$$

Angenommen es gäbe A, B mit $AB - BA = E_n$, dann wäre aber $\operatorname{spur}(AB - BA) = \operatorname{spur}(E_n) = n \neq 0$.

e) Betrachte $\mathbb{F}_2$ und die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt mit der Addition und Multiplikation in $\mathbb{F}_2$ (!):

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

f) Wir wollen zeigen, dass die Matrix A mit n verschiedenen Eigenwerten im $\mathbb{R}^n$ diagonalisierbar ist. (Siehe dazu A10.1.) Wenn dies so ist, dann gibt es eine Basiswechselmatrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass $A = S^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_i)S$, denn $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. Also ist nach Teilaufgabe c) $\operatorname{spur}(A) = \operatorname{spur}(\operatorname{diag}(\lambda_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Es genügt zu zeigen, dass die zu λ_i gehörigen Eigenvektoren linear unabhängig sind.
IV: $n = 1$
Nach Definition (A10.1) ist $v_1 \neq 0$, also linear unabhängig.
IS: Die Behauptung gilt für $n-1$.
Sei $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ mit $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = 0$. Ohne Einschränkung sei $\lambda_n \neq 0$ (durch geeignete Wahl der Indizes).
Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 = A \cdot 0 &= A \cdot (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) \\ &= \mu_1 A v_1 + \ldots + \mu_n A v_n \\ &= \lambda_1 \mu_1 v_1 + \ldots + \lambda_n \mu_n v_n \end{aligned} \tag{10.1}$$

Ebenso gilt:

$$0 = \lambda_n \cdot (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n). \tag{10.2}$$

Es ergibt sich durch (10.1) – (10.2):

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_1(\lambda_1 - \lambda_n) v_1 + \ldots + \mu_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) v_{n-1} + \mu_n(\lambda_n - \lambda_n) v_n \\ &= \mu_1(\lambda_1 - \lambda_n) v_1 + \ldots + \mu_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) v_{n-1} \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind $v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig, also folgt:

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_n) = \ldots = \mu_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) = 0,$$

und da $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$:

$$\mu_1 = \ldots = \mu_{n-1} = 0.$$

Aus Gleichung (10.2) folgt dann auch $\mu_n = 0$ (siehe o.E.). Somit gilt nun $\mu_1 = \ldots = \mu_n = 0$ und somit sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig. $\square$
Bemerkung: Dieser Beweis geht ganz analog für die allgemeinere Aussage:
Sei V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Seien v_j ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j für $j = 1, \ldots, n$ und es gelte $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.
Es folgt: Ist zudem $\dim(V) = n$, so besitzt f höchstens n verschiedene Eigenwerte, und falls f genau n verschiedene Eigenwerte besitzt, so ist f diagonalisierbar.

Aufgabe 10.6 (**Basiswechsel**)
Betrachte $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit den Basen:

$$\mathcal{A} = \{(1,-1,2)^\top, (2,3,7)^\top, (2,3,6)^\top\},$$
$$\mathcal{B} = \{(1,2,2)^\top, (-1,3,3)^\top, (-2,7,6)^\top\}.$$

a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $A_{\mathrm{id},\mathcal{A},\mathcal{B}}$.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = 2\cdot(1,-1,2)^\top + 9\cdot(2,3,7)^\top - 8\cdot(2,3,6)^\top$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Lösung

a) Der Basiswechsel $A_{\mathrm{id},\mathcal{A},\mathcal{B}}$ bildet den Koeffizientenvektor $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^\top$ eines beliebigen $v\in\mathbb{R}^3$ mit $v=\sum\lambda_i v_{\mathcal{A},i}$ auf den Koeffizientenvektor $(\mu_1,\mu_2,\mu_3)^\top$ mit $v=\sum\mu_i v_{\mathcal{B},i}$ ab. Dafür müssen die Basisvektoren von $\mathcal{A}$in der Basis $\mathcal{B}$dargestellt werden. Die dabei auftretenden Koeffizienten werden spaltenweise in die Transformationsmatrix geschrieben. Es gilt:

$$\begin{aligned}
(1,-1,2)^\top &= 1\cdot(1,2,2)^\top && +6\cdot(-1,3,3)^\top && -3\cdot(-2,7,6)^\top\\
(-1,3,3)^\top &= 2.6\cdot(1,2,2)^\top && +8.6\cdot(-1,3,3)^\top && -4\cdot(-2,7,6)^\top\\
(-2,7,6)^\top &= 2.4\cdot(1,2,2)^\top && +6.4\cdot(-1,3,3)^\top && -3\cdot(-2,7,6)^\top
\end{aligned}$$

Damit ist die Transformationsmatrix gegeben durch:

$$A_{\mathrm{id},\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2.6 & 2.4\\ 6 & 8.6 & 6.4\\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Wir wenden einfach den in a) bestimmten Basiswechsel an:

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{pmatrix} = A_{\mathrm{id},\mathcal{A},\mathcal{B}}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 9\\ -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6.2\\ 38.2\\ -18\end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.7 (**Lineare Abbildungen**)
Im folgenden seien die Räume $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit der Standardbasis $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1,\ldots,n}$. Bestimmen Sie die Matrizen $A_{f,\mathcal{E},\mathcal{E}}$ für folgende Endomorphismen:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: Rotation um 90 Grad in mathematisch negativer Richtung.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: Spiegelung an der Achse $x = 0$.

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: Rotation um 180 Grad um die Achse, die von $(0, 0, 1)$ erzeugt wird.

Lösung a) Es gilt also $f(e_1) = -e_2$ und $f(e_2) = e_1$. Also ist $f(x) = Ax$ mit

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt also $f(e_1) = -e_1$ und $f(e_2) = e_2$. Somit ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Rotation um x_3-Achse: Es gilt also $f(e_1) = -e_1$, $f(e_2) = -e_2$ und $f(e_3) = e_3$. Die zugehörige Matrix A ist eine 3×3-Matrix. Die zugehörige Matrix ist also

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.8 (**Vektorraum der Folgen**)
Betrachte den reellen Vektorraum reeller Folgen und die Menge:

$$F = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}.$$

a) Zeigen Sie, dass F ein Untervektorraum des Folgenraumes ist. Bestimmen Sie eine Basis.

b) Finden Sie eine weitere Basis mit Elementen der Form $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Erklären Sie, wie man mit b) direkt das n-te Folgenglied bestimmen kann? Geben Sie diese Formel für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ explizit an.

Bemerkung: Der Folgenraum ist ein unendlich dimensionaler Vektorraum. F ist ein endlich dimensionaler Unterraum.

Lösung
In dieser Lösung ist die Notation für eine Folge $(\cdot)_n$ und das k-te Folgenglied von $(a_n)_n$ ist a_k.

a) Es ist $(0)_n \in F$. Sei $(a_n)_n, (b_n)_n \in F$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\lambda(a_n)_n + (b_n)_n = (\lambda a_n + b_n)_n \in F,$$

denn die Vorschrift von F lautet:

$$\begin{aligned}\lambda a_{n+2} + b_{n+2} &= \lambda(a_{n+1} + a_n) + b_{n+1} + b_n \\ &= (\lambda a_{n+1} + b_{n+1}) + (\lambda a_n + b_n).\end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass F ein Untervektorraum des Folgenraumes ist. Nun müssen wir noch eine Basis finden. Dazu definieren wir die beiden Folgen $(b_n)_n$ und $(c_n)_n$ über:

$$\begin{aligned} &b_1 = 1, \quad b_2 = 0, \quad b_{n+2} = b_{n+1} + b_n, \\ &c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_{n+2} = c_{n+1} + c_n. \end{aligned}$$

Nach Definition gilt $(b_n)_n, (c_n)_n \in F$. Behauptung: $((b_n)_n, (c_n)_n)$ ist eine Basis von F.

- Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda(b_n)_n + \mu(c_n)_n = 0$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{matrix}\lambda b_1 + \mu c_1 = 0 \\ \lambda b_2 + \mu c_2 = 0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda + 0 = 0 \\ 0 + \mu = 0\end{matrix} \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

  Somit ist $((b_n)_n, (c_n)_n)$ linear unabhängig.

- Sei $(a_n)_n \in F$ beliebig, dann gilt direkt:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 b_1 + a_2 c_1 \\ a_2 &= a_1 b_2 + a_2 c_2 \end{aligned}$$

Induktionsbehauptung:

$$a_k = a_1 b_k + a_2 c_k$$

Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n &= a_1 b_{n+1} + a_2 c_{n+1} + a_1 b_n + a_2 c_n \\ &= a_1(b_{n+1} + c_{n+1}) + a_2(b_n + c_n) \\ &= a_1 b_{n+2} + a_2 b_{n+2}. \end{aligned}$$

Und damit ist $((b_n)_n, (c_n)_n)$ ein Erzeugendensystem. Man beachte, dass die Induktion von n auf $n+2$ schließt. Daher benötigt man zwei Induktionsanfänge $k = 1$ und $k = 2$.

b) Behauptung: $(r^n)_n \in F \Leftrightarrow (r = 0$ oder $r^2 = r + 1)$.
„$\Rightarrow$“: Sei $(r^n)_n \in F$ und $r \in \mathbb{R} \setminus 0$, dann ist nach der rekursiven Eigenschaft von Folgen in F: $r^3 = r^2 + r$. Da $r \neq 0$ folgt: $r^2 = r + 1$.
„$\Leftarrow$“: Für $r = 0$ ist $(r^n)_n = (0)_n \in F$. Im Fall $r^2 = r + 1$ sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt: $r^{n+2} = r^2 r^n = (r + 1)r^n = r^{n+1} + r^n$, also ist $(r^n)_n \in F$.

Im Fall $r = 0$ erhält man die Nullfolge die kein Basiselement sein kann. Daher suchen wir Elemente $r \in \mathbb{R}$, die die Gleichung $r^2 = r + 1$ erfüllen. Also Nullstellen von $r^2 - r - 1$. Die Nullstellen sind gegeben durch: $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $1 - t$.
Behauptung: $T = ((t)_n, (1 - t)_n)$ ist eine Basis von F.
Da F nach a) 2-dimensional ist genügt es die lineare Unabhängigkeit von T zu zeigen. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda(t)_n + \mu(1 - t)_n = (0)_n$. Dann gilt für $n = 1$ und $n = 2$:

$$\lambda t + \mu(1 - t) = 0 \tag{10.3}$$
$$\lambda t^2 + \mu(1 - t)^2 = 0 \tag{10.4}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} (10.4) - t \cdot (10.3) : \qquad 0 &= \mu(1 - t)^2 - \mu(1 - t)t \\ &= \mu(1 - 3t + 2t^2) \\ &= \mu(1 - 3t + 2(1 + t)) \\ &= \mu(3 - t). \end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass $t^2 = t + 1$ ist. Da $3 - t \neq 0$ gilt $\mu = 0$ und damit $\lambda = 0$.

c) Nach b) ist T eine Basis, dass heißt für beliebiges $(a_n)_n \in F$ gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $(a_n)_n = \lambda(t^n)_n + \mu((1-t)^n)_n$. Für das n-te Folgenglied gilt daher $a_n = \lambda t^n + \mu(1-t)^n$.
Im Beispiel der Aufgabe ist nun $a_1 = a_2 = 1$, und somit erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda t + \mu(1-t) \\ 1 &= \lambda t^2 + \mu(1-t)^2 \end{aligned}$$

War substrahieren wie oben das t-fache der 1. Gleichung von der 2. und erhalten:

$$1 - t = \mu(1-t)^2 - \mu(1-t)t = \ldots = \mu(3-t).$$

Setzt man t ein und investiert viel Arbeit ergibt sich: $\mu = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \lambda = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Und damit:

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(t^n - (1-t)^n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{5}\right)^2\right).$$

Aufgabe 10.9 (Interpolation)
Finden Sie ein Polynom $p(x)$ vom Grad 4 (also $p \in \mathbb{P}_4$), dass die folgenden Werte annimmt:

$x =$	-2	-1	0	1	2
$p(x) =$	-27	-3	1	3	-3

Lösung
Das Polynom hat diese Gestalt $p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4$. Zum Bestimmen der Koeffizienten a_i muss ein Gleichungssystem gelöst werden.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b
1	-2	4	-8	16	-27
1	-1	1	-1	1	-3
1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	3
1	2	4	8	16	-3

Gauß-Elimination liefert folgende Lösung

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T.$$

Aufgabe 10.10 (Dimensionsformel)
Sei V ein K-Vektorraum und $U, W \subset V$ Untervektorräume. Die Dimensionsformel für Untervektorräume lautet:

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W). \tag{10.5}$$

Sei $K = \mathbb{R}$,$V = \mathbb{R}^4$ und

$$\begin{aligned} U &= \langle (1,0,1,2)^\top, (0,1,1,1)^\top \rangle, \\ W &= \langle (1,1,4,0)^\top, (2,-3,-1,1)^\top, (3,1,0,0)^\top \rangle. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie Basen von $U+W$ und $U \cap W$ und verifizieren Sie anhand dieser die Dimensionsformel.
Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung der Basen den *Zassenhaus-Algorithmus* (siehe nächste Seite). Die Rechnung verläuft mit ganzen Zahlen.

Zassenhaus-Algorithmus zur Bestimmung einer Basis von $U+W$ und $U \cap W$.
Seien U, W Untervektorräume von V und $\dim(V) = n$. Sei $(u_1, \ldots, u_k)$ eine Basis von U und $(w_1, \ldots, w_l)$ eine Basis von V.

1. Schreibe die Basisvektoren als Zeilenvektoren in die Matrix $\mathbf{Z} \in K^{(k+l)\times 2n}$.

$$\mathbf{Z} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} & u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{k,1} & \cdots & u_{k,n} & u_{k,1} & \cdots & u_{k,n} \\ \hline w_{1,1} & \cdots & w_{1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{l,1} & \cdots & w_{l,n} & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

2. Bringe die Matrix $\mathbf{Z}$ auf Zeilenstufenform:

$$\mathbf{Z}' = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & * \\ \hline 0 & \mathbf{B} \end{array}\right)$$

3. Die Zeilenvektoren von $\mathbf{A}$ bilden eine Basis von $U+W$. Die Zeilenvektoren von $\mathbf{B}$ bilden eine Basis von $U \cap W$.

Lösung
Es gilt:

$$\dim(U+W) = 4 = 2+3-1 = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

$$\dim(U) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2, \text{ da lin unabh.}$$

$$\dim(W) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Gaußalgorithmus

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 3 & -2 & -1 & 0 & -1 & -2 \\
0 & -3 & -3 & -3 & -2 & 0 & -2 & -4 \\
0 & 1 & -3 & -6 & -3 & 0 & -3 & -6
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 & -3 & -1 & -1 & -2 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -4 & -7 & -3 & -1 & -4 & -7
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 & -3 & -1 & -1 & -2 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -13 & -5 & -3 & -8 & -13
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 & -3 & -1 & -1 & -2 & -3 \\
0 & 0 & 0 & -13 & -5 & -3 & -8 & -13 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 1 & -1
\end{array}\right)
$$

Es ist also $\{(1,0,1,2)^\top, (0,1,1,1)^\top, (0,0,-2,-3)^\top, (0,0,0,-13)^\top\}$ eine Basis von $U+W$ und $\{(-2,3,1,-1)^\top\}$ eine Basis von $U \cap W$.

Beweis Zassenhaus-Algorithmus

Der Beweis geht am schnellsten mit einem allgemeineren Satz, der A8.2 ähnelt. Siehe auch Wikipedia zu Zassenhaus-Algorithmus. Das war nicht in der Aufgabe gefordert.

Satz 0.1

Sei V ein K-Vektorraum. Seien U, W Untervektorräume. Definiere:

$$
\begin{aligned}
U &= \langle u_1, \dots, u_k \rangle, \\
W &= \langle w_1, \dots, w_l \rangle, \\
X &= \langle (u_1, u_1), \dots, (u_k, u_k), (w_1, 0), \dots, (w_l, 0) \rangle \subset V \oplus V, \\
\pi &: X \to V, \quad (x, y) \mapsto x.
\end{aligned}
$$

Dann gilt:

i) π *ist eine lineare Abbildung.*

ii) $\operatorname{im}(\pi) = U + W$.

iii) $\ker(\pi) = \{0\} \oplus (U \cap W)$.

iv) $X \cong U \oplus W$.

Beweis.

i) klar.

ii) Klar nach Definition von π.

iii) „$\subset$“: Sei $(0, z) \in \ker(\pi)$, dann gibt es $u \in U$ und $w \in W$ mit

$$(0, z) = (u, u) + (w, 0).$$

Also ist $z = u$ und somit $z \in U$. Da auch $u = -w$ ist folgt mit der Abgeschlossenheit von Vektorräumen auch $z \in W$, also $z \in U \cap W$. „$\supset$“: Sei $z \in (U \cap W)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & (0, z) = (z, z) + (-z, 0) \in X. \text{ (wohldef)} \\ \Rightarrow \quad & (0, z) \in \ker(\pi). \end{aligned}$$

iv) Definiere folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned} \varphi &: U \oplus W \to X, \quad (u, w) \mapsto (u + w, u), \\ \psi &: X \to U \oplus W, \quad (x, y) \mapsto (x, x - y). \end{aligned}$$

Dann gilt: $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_X$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{U \oplus W}$. Nach A2.4a) sind beide Abbildungen bijektiv.

□

Die Matrix $\mathbf{Z}$ lässt sich in der Form wie im Satz schreiben:

$$((u_1, u_1), \ldots, (u_k, u_k), (w_1, 0), \ldots, (w_l, 0)).$$

Nach der Umformung erhält man:

$$((a_1, *), \ldots, (a_\mu, *), (0, b_1), \ldots, (0, b_\nu), (0, 0), \ldots, (0, 0)),$$

mit $a_i, b_i \neq 0$.
In den ersten ν Zeilen wurde eine Basis von $U + V$ berechnet. Nach Bosch Satz 2.1.10 (keine Ahnung ob der in der Vorlesung dran kam) und mit obigem Satz gilt:

$$\begin{aligned} \dim(U \oplus W) &= \dim(X) \\ &= \dim(\operatorname{im}(\pi)) + \dim(\ker(\pi)) \\ &= \dim(U + W) + \dim(U \cap W). \end{aligned}$$

Die Dimension von $U \oplus W$ entspricht gerade der Zeilen in $\mathbf{Z}'$ die ungleich 0 sind.
Also: $\dim(U \oplus W) = \mu + \nu$. Damit gilt $\dim(U \cap W) = (\mu + \nu) - \mu = \nu$. Da aber die Vektoren $(0, b_i)$ nach obigem Satz in $U \cap W$ liegen und es genau ν linear unabhängige Vektoren sind, bilden sie eine Basis von $U \cap W$.