Übungen zur Linearen Algebra 2

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat, Dr. Ernst Lexen,
David Guiraud, Philipp Siehr

Blatt 1
Abgabetermin: Freitag, 24.04.2015, 11 Uhr

Die Abgabe der Aufgabenzettel ist in Gruppen von zwei Studenten verpflichtend. Die Zettelkästen befinden sich wieder in INF 294 (Institut für Angewandte Mathematik).
Wichtig: Bitte tragen Sie sich über **Müsli** in eine Übungsgruppe ein.

Aufgabe 1.1 (**Determinanten und Eigenwerte** - *4 Punkte*)
Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 0 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A - \lambda I$ als Funktion von λ.

b) Wie hängt die Eigenschaft von λ, Eigenwert von A zu sein mit dieser Funktion zusammen?
Hinweis: eine Matrix B ist invertierbar genau dann, wenn $\det B \neq 0$.

c) Geben Sie die drei Eigenwerte von A an.

Aufgabe 1.2 (**Aufwandsanalyse** - *4 Punkte*)
Bestimmen Sie die Anzahl der Additionen und Multiplikationen für die Berechnung der Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit:

a) der Definition der Determinante (Leibnizformel):

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(i),i}, \qquad \text{wobei } A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$$

Vernachlässigen Sie die Kosten der Signumfunktion.

b) dem Gauß-Algorithmus.
Hinweis: $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$.

Ein moderner Prozessor benötigt für eine Rechenoperation ungefähr eine Nanosekunde. Schätzen Sie die Matrixgröße, wenn die Rechenzeit unter 48 Stunden liegen soll.
Bemerkung: Die Entwicklung nach Laplace besitzt einen ähnlich großen Aufwand wie die Leibnizformel. Beide Verfahren eignen sich daher nicht in der Praxis.

Bitte wenden

Aufgabe 1.3 (**Einheitengruppe** - *3 Punkte*)
Sei R ein Ring. Zeigen Sie

a) Die Menge R^* der Einheiten ist eine multiplikative Gruppe. Da $(R, \cdot)$ ein Monoid ist, überlegen Sie sich, was dazu noch zu zeigen ist.

b) Zeigen Sie: Ist R ein kommutativer Ring, so gilt $R^* = R \setminus \{0\}$ genau dann, wenn R ein Körper ist.

Bemerkung: Fordert man in b) nur einen Ring, so ist die Äquivalenz zu einem Schiefkörper gegeben. Ein Schiefkörper besitzt alle Eigenschaften eines Körpers, mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation.

Aufgabe 1.4 (**Nullring** - *2 Punkte*)
Sei N der Nullring, also die einelementige Menge $\{0\}$ mit Addition und Multiplikation. Offensichtlich gilt hier $1 = 0$. Zeigen Sie nun für einen beliebigen Ring R, dass diese Gleichung impliziert, dass R der Nullring ist.

Aufgabe 1.5 (**Polynom und Polynomfunktion** - *4 Punkte*)

a) Sei das folgende Polynom über dem Körper $\mathbb{F}_5$ mit 5 Elementen gegeben:

$$f = x^5 + x + \bar{1} \in \mathbb{F}_5[x]$$

Bestimmen Sie alle Werte der Polynomfunktion $\tilde{f}$.
Geben Sie ein weiteres Polynom $g \in \mathbb{F}_5[x]$ mit $\tilde{g} = \tilde{f}$ an.

b) Sei nun K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass es ein nicht-konstantes Polynom über K gibt, welches keine Nullstelle besitzt.
Geben Sie ein Beispiel für den Körper $\mathbb{F}_5$ an.