Übungen zur Linearen Algebra 2

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat, Dr. Ernst Lexen,
David Guiraud, Philipp Siehr

Blatt 2
Abgabetermin: **Do., 30.04.2015, 11 Uhr**

Aufgabe 2.1 (**Gaußsche Zahlen** - *3 + 2* Punkte*)
Sei

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

Mit den von $\mathbb{C}$ vererbten Operationen

$$\big(a + bi\big) \boxplus \big(u + vi\big) := (a + u) + (b + v)i,$$

$$\big(a + bi\big) \boxdot \big(u + vi\big) := (au - bv) + (av + bu)i,$$

bildet $\mathbb{Z}[i]$ den (kommutativen) Ring der Gaußschen Zahlen.

a) Zeigen Sie: Die komplexe Konjugation

$$\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i] \qquad a + bi \mapsto \overline{a + bi} := a - bi$$

definiert einen Ringautomorphismus von $\mathbb{Z}[i]$.

b)
- Zeigen Sie, dass die Abbildung $N : z \mapsto z\overline{z}$ von $\mathbb{Z}[i]$ nach $\mathbb{N}_0$ multiplikativ ist: Für $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$ gilt $N(z \boxdot z') = N(z) \cdot N(z')$.
- Benutzen Sie die Multiplikativität von N um die Menge $\mathbb{Z}[i]^*$ der invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}[i]$ zu bestimmen.

c) (Zusatzpunkte) Prüfen Sie nach, dass $\mathbb{Z}[i]$ mit den Operationen $\boxplus$ und $\boxdot$ die Axiome eines kommutativen, nullteilerfreien Ringes erfüllt.

Bemerkung: Die Definition der Menge $\mathbb{Z}[i]$ ist nicht zu verwechseln mit dem Polynomring $\mathbb{Z}[x]$. Erinnern Sie sich an die Konstruktion von $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ in LA1.

Aufgabe 2.2 (**Binäre Ringe** - *3 Punkte*)
Sei $R \neq (0)$ ein Ring, in dem $r^2 = r$ für alle $r \in R$ gilt. Man zeige:

a) Es gilt $r + r = 0$ für alle $r \in R$ (d.h.: $\mathrm{char}(R) = 2$);

b) R ist kommutativ;

c) Ist R Integritätsring, so ist $R = \mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen.

Bitte wenden

Aufgabe 2.3 (*4 Punkte*)
Sei R der Ring aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zusammen mit der punktweisen Addition und Multiplikation:

$$\big(f \boxplus g\big)(x) := f(x) + g(x),$$
$$\big(f \boxdot g\big)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

a) Bestimmen Sie die Menge R^* der invertierbaren Elemente.

b) Ein Element $f \in R \backslash R^*$ heißt *irreduzibel*, falls es keine zwei Elemente $g_1, g_2 \in R \backslash R^*$ gibt mit $f = g_1 \boxdot g_2$. Zeigen oder wiederlegen Sie: In R existieren keine irreduziblen Elemente.

c) Für ein $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$I_x := \{f \in R \mid f(x) = 0\}.$$

Zeigen oder wiederlegen Sie: I_x ist ein Ideal in R.

d) Ein Ideal $I \subset R$ heisst *Hauptideal* wenn ein $f_0 \in R$ existiert so dass

$$I = (f_0) := \{f \cdot f_0 \mid f \in R\}$$

gilt. Geben Sie ein Ideal an welches kein Hauptideal ist.

Aufgabe 2.4 (**Formale Differentiation** - *3 Punkte*)
Sei K ein Körper. Wir definieren die formale Differentiation $f \mapsto f'$ als Abbildung

$$K[x] \to K[x] \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}.$$

a) Sei $f \in K[x]$ mit $\mathrm{grad}(f) > 0$. Ein $y \in K$ heisst Nullstelle von f wenn f von dem Polynom $(x-y)$ geteilt wird, also wenn ein $g \in K[x]$ existiert so daß $f = (x-y) \cdot g$. (Das ist äquivalent zur Eigenschaft $f(y) = 0$.) Für eine Nullstelle y definieren wir die Vielfachheit als

$$\max\{i \in \mathbb{N} | (x-y)^i \text{ teilt } f\}.$$

Zeigen Sie: Die Vielfachheit von y ist 1 genau dann wenn $f'(y) \neq 0$.

b) Wir nehmen an K hat Charakteristik 0, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Elemente

$$0 \in K \qquad \text{und} \qquad n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}} \in K$$

verschieden voneinander. Zeigen Sie: $\mathrm{grad}(f') = \mathrm{grad}(f) - 1$.

(Tipp zu Teilaufgabe a: Überlegen Sie sich zunächst, dass für die formale Differentiation die Produktregel gilt: $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$.)

Abgabetermin: Donnerstag, 30.04.2015 11 Uhr