Übungen zur Linearen Algebra 2

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat, Dr. Ernst Lexen,
David Guiraud, Philipp Siehr

Blatt 3
Abgabetermin: Freitag, 08.05.2015, 11 Uhr

Aufgabe 3.1 (**Irreduzible Elemente und Primelemente** - *3 Punkte*)

Wir definieren den Ring

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \in \mathbb{C} | a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

mit den von $\mathbb{C}$ vererbten Operationen

$$\left(a + b\sqrt{-5}\right) \boxplus \left(u + v\sqrt{-5}\right) := (a + u) + (b + v)\sqrt{-5},$$

$$\left(a + b\sqrt{-5}\right) \boxdot \left(u + v\sqrt{-5}\right) := (au - 5bv) + (av + bu)\sqrt{-5}.$$

Ähnlich wie in Aufgabe 2.1 existiert eine multiplikative Normabbildung

$$N : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{N}_0 \qquad a + b\sqrt{-5} \mapsto a^2 + 5b^2$$

mit deren Hilfe man

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^* = \{z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \,|\, N(z) = 1\} = \{\pm 1\}$$

erhält (das dürfen Sie ohne Beweis benutzen).
Zeigen Sie: $3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist irreduzibel, aber kein Primelement. Benutzen Sie dieses Resultat, um zu begründen, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ kein Hauptidealring ist.
Bemerkung: Im Gegensatz hierzu kann man zeigen dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ sowie die Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i]$ Hauptidealringe sind.

Aufgabe 3.2 (**Primelemente im Polynomring** - *2 Punkte*)
Sei K ein Körper. Zeigen Sie: $K[x]$ besitzt unendlich viele Primelemente.
Hinweis: Nehmen Sie an, es gibt nur endlich viele Primelemente $f_1, \ldots, f_k$ und betrachten Sie das Polynom $1 + f_1 \cdot \ldots \cdot f_k$. (Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass jedes Polynom $f \in K[x]$ mit $\mathrm{grad}(f) > 0$ einen Primteiler besitzt. Dies folgt aus der Charakterisierung von $K[x]$ als *faktorieller Ring*.)

Bitte wenden

Aufgabe 3.3 (**Teilbarkeit und euklidischer Algorithmus** - *4 Punkte*)
Man betrachte die folgenden Polynome $f, g \in \mathbb{R}[x]$ und dividiere f mit Rest durch g:

a) $f = x^6 + 3x^4 + x^3 - 2, g = x^2 - 2x + 1$.

Man berechne mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der folgenden Polynome:

b) $f = x^2 + 1, g = x^2$ in $\mathbb{Q}[x]$.

c) $f = x^3 + 2x^2 - x + 1, g = x + 2$ in $\mathbb{F}_3[x]$.

Aufgabe 3.4 (**Matrizenringe** - *4 Punkte*)
Sei K ein Körper und $A = K^{2\times 2}$ der Ring der 2×2-Matrizen mit Einträgen in K, mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen. Wir definieren einen weiteren Ring

$$B = \{(k_1, k_2, k_3, k_4) \mid k_i \in K\},$$

mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation.

a) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Ringe A und B sind isomorph.

b) Zeigen Sie: Die einzigen (beidseitigen) Ideale von A sind (0) und A.