Übungen zur Linearen Algebra 2

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat, Dr. Ernst Lexen, Blatt 4
David Guiraud, Philipp Siehr Abgabetermin: Freitag, 15.05.2015, 11 Uhr

---

Aufgabe 4.1 (**Polynomring** - *3 Punkte*)

Sei K ein Körper und $K[x]$ der Polynomring mit Koeffizienten in K.

a) Zeigen Sie:

$$(K[x])^* = K^* = \{f \in K[x] \mid f \neq 0 \text{ und } \operatorname{grad}(f) = 0\}.$$

b) Sei $f \in K[x]$ ein Polynom vom Grad 2 oder 3, welches keine Nullstelle in K besitzt. Zeigen Sie: f ist irreduzibel.

Aufgabe 4.2 (**Ähnlichkeit von Matrizen** - *5 Punkte*)

Sei K ein Körper und $M, N \in K^{n\times n}$ zwei ähnliche Matrizen.

a) Zeigen Sie: $\det(M) = \det(N)$ und $\operatorname{spur}(M) = \operatorname{spur}(N)$.

b) Zeigen Sie: $\operatorname{rang}(M) = \operatorname{rang}(N)$.

c) Finden Sie zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(A) = \det(B)$, $\operatorname{spur}(A) = \operatorname{spur}(B)$ aber $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(B)$. Folglich sind A und B nicht ähnlich.

d) Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ähnlich sind:
$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $N = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4.3 (**Eigenvektoren** - *2 Punkte*)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Seien $v, w \in V\backslash\{0\}$ Eigenvektoren von f. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an, dass $v - w$ Eigenvektor von f ist.

Bitte wenden

Aufgabe 4.4 (**Algebren -** *4 Punkte + 2* Punkte*)
Sei K ein Körper und A eine K-Algebra.

a) Zeigen Sie, dass sich A mithilfe der Algebren-Operationen

$$A \times A \to A \qquad (a, a') \mapsto a + a',$$

$$K \times A \to A \qquad (k, a) \mapsto \varphi(k) \cdot a,$$

als K-Vektorraum auffassen lässt. Zeigen Sie außerdem, dass für ein fixiertes $a_0 \in A$ die Linksmultiplikationsabbildung

$$\lambda_{a_0} : A \to A \qquad a \mapsto a_0 \cdot a$$

K-linear ist.

b) Sei $K = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{R}^{2\times 2}$ die $\mathbb{R}$-Algebra der 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$. Berechnen Sie die Determinante $\det(\lambda_M)$ für $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in A$.
Zur Erinnerung: Die charakterisierende Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to A$ ist hier gegeben durch

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

c) (Bonusaufgabe) Sei K wieder ein beliebiger Körper und nehmen Sie an, dass die Dimension von A als K-Vektorraum (aufgefasst wie in Teilaufgabe a) endlich ist. Zeigen Sie, dass ein Element $a \in A$ invertierbar ist genau dann wenn a kein Nullteiler ist, indem Sie diese Bedingungen in entsprechende Eigenschaften der Abbildung λ_a übersetzen.

Bemerkung: Das Resultat von Teilaufgabe c) lässt sich wie folgt zusammenfassen: Eine endlich-dimensionale K-Algebra ist nullteilerfrei genau dann, wenn sie ein Schiefkörper ist (vgl. Aufgabe 1.3).