Übungen zur Linearen Algebra 2

Sommersemester 2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat, Dr. Ernst Lexen,
David Guiraud, Philipp Siehr

Blatt 5
Abgabetermin: Freitag, 22.05.2015, 11 Uhr

Aufgabe 5.1 (**Charakteristisches Polynom und Eigenräume** - *4 Punkte*)

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A von A;

b) Zeigen oder widerlegen Sie: A ist diagonalisierbar;

c) Berechnen Sie die Eigenräume für alle Eigenwerte λ von A.

Aufgabe 5.2 (**Eigenwerte** - *2 Punkte*)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

a) Angenommen, alle Einträge von A sind reell. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie: $\overline{\lambda}$ ist auch Eigenwert von A. Geben Sie ausserdem einen Eigenvektor von A zu $\overline{\lambda}$ an (in Abhängigkeit von v).

b) Es gelte $A^4 = E_n$. Welche $\lambda \in \mathbb{C}$ kommen als Eigenwerte von A in Frage?

Aufgabe 5.3 (**Eigenwerte** - *3 Punkte*)

Sei V ein Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

a) Angenommen, f^2 hat den Eigenwert 1 und $v \in V$ ist Eigenvektor von f^2 zum Eigenwert 1, aber kein Eigenvektor von f. Zeigen Sie, dass f die Eigenwerte 1 und -1 hat;

b) Angenommen, -1 ist Eigenwert von $f^2 + f$. Zeigen Sie, dass f^3 den Eigenwert 1 hat;

c) Geben Sie für den Fall $V = \mathbb{R}^3$ ein f an, welches die Bedingungen von Aufgabenteil a) erfüllt.

Bitte wenden

Aufgabe 5.4 (**Diagonalisierbarkeit** - *2 Punkte*)

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

- f ist diagonalisierbar;
- $f + \mathrm{id}$ ist diagonalisierbar;

Aufgabe 5.5 (**Simultane Diagonalisierbarkeit** - *4 Punkte*)

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f, g : V \to V$ lineare Abbildungen. Wir sagen, f und g sind *simultan diagonalisierbar*, wenn eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von V existiert so dass alle b_i Eigenvektoren sowohl von f als auch von g sind.

a) Zeigen Sie: Sind f und g simultan diagonalisierbar, so gilt $f \circ g = g \circ f$;

b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Umkehrung von Teil a) nicht gilt;

c) Zeigen Sie: Unter der zusätzlichen Annahme, dass f (oder g) genau n verschiedene Eigenwerte besitzt, gilt die Umkehrung von Teil a): Aus $f \circ g = g \circ f$ folgt dann die simultane Diagonalisierbarkeit von f und g.