Übungen zur Linearen Algebra 2

Sommersemester 2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat, Dr. Ernst Lexen,
David Guiraud, Philipp Siehr

Blatt 6
Abgabetermin: Freitag, 29.05.2015, 11 Uhr

Aufgabe 6.1 (**Moduln** - *4 Punkte*)

Sei R ein Integritätsring und M ein R-Modul. Wir definieren den *Torsionsmodul* von M als

$$M_{\texttt{tor}} = \{m \in M \,|\, \exists r \in R \backslash \{0\} \text{ so dass } r \cdot m = 0\}$$

und den *Annihilator* von M als

$$\mathrm{Ann}(M) = \{r \in R \,|\, r \cdot m = 0 \ \forall m \in M\}.$$

Zeigen Sie:

a) $M_{\texttt{tor}}$ ist ein Untermodul von M;

b) $\mathrm{Ann}(M)$ ist ein Ideal von R;

c) Bestimmen Sie Torsionsmodul und Annihilator des $\mathbb{Z}$-Moduls

$$M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 6.2 (**Cramersche Regel** - *3 Punkte*)

Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem mit der Cramerschen Regel:

$$A \cdot u = v \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden

Aufgabe 6.3 (**Formale Differentiation 2** - *3 Punkte*)

Sei K ein Körper von Charakteristik 0 und

$$\varphi : K[x] \to K[x] \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

der in Aufgabe 2.4 untersuchte formale Ableitungsoperator. Zeigen Sie: Es existiert kein von Null verschiedenes Polynom $f \in K[x]$ mit $f(\varphi) = 0$.
Erinnerung: Es wurde bereits in der Vorlesung gezeigt, dass φ K-linear ist.
Tipp: Machen Sie sich zunächst klar, dass $f(\varphi) = 0$ als Gleichheit in $\mathrm{Abb}(K[x], K[x])$ zu verstehen ist. Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie ein geeignetes Polynom in beide Abbildungen einsetzen und die Koeffizienten vergleichen.

Aufgabe 6.4 (**Satz von Cayley-Hamilton** - *4 Punkte*)

Sei $f : V \to V$ ein linearer Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V über einem Körper K.

a) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen unter der Annahme dass K algebraisch abgeschlossen ist:
   - f ist nilpotent (d. h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n = 0$);
   - f besitzt keine Eigenwerte außer 0.

b) Zeigen Sie, dass auf die obige Bedingung nicht verzichtet werden kann, indem Sie eine Matrix in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ angeben, welche keine reellen Eigenwerte (außer eventuell 0) besitzt und nicht nilpotent ist.