Übungen zur Linearen Algebra 2

Sommersemester 2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat, Dr. Ernst Lexen, David Guiraud, Philipp Siehr

Blatt 7
Abgabetermin: Freitag, 05.06.2015, 11 Uhr

Aufgabe 7.1 (**Einsetzungshomomorphismus** - *4 Punkte*)

Seien R, S kommutative Ringe.

a) Zeigen Sie folgende alternative Form des Satzes über den Einsetzungshomomorphismus (Satz 5.1.7 der Vorlesung): Für einen Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ und ein Element $s_0 \in S$ existiert genau ein Ringhomomorphismus

$$\psi : R[x] \to S$$

mit $\psi|_R = \varphi$ und $\psi(x) = s_0$.

b) Benutzen Sie Aufgabenteil a), um die Existenz eines Ringisomorphismus

$$\psi : R[x][y] \to R[y][x]$$

mit $\psi|_R = \mathrm{id}_R$, $\psi(x) = x$ und $\psi(y) = y$ zu zeigen.

Bemerkung: Die Notation $R[x][y]$ ist folgendermaßen zu verstehen: Zunächst bilde man den Polynomring $T := R[x]$, dann bezeichne $R[x][y] := T[y]$ den Polynomring mit Koeffizienten in T.

Aufgabe 7.2 (**Satz von Cayley-Hamilton 2** - *5 Punkte*)

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Sei $f : V \to V$ linearer Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes und $p \in K[x]$ ein Polynom mit $p(f) = 0$. Zeigen Sie: Jeder Eigenwert von f ist eine Nullstelle von p. Folgern Sie hieraus, dass χ_f und das Minimalpolynom von f die gleichen Nullstellen haben.

c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Bitte wenden

Aufgabe 7.3 (**Satz von Cayley-Hamilton 3** - *2 Punkte*)

Sei

$$M = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

Bestimmen Sie $M^{298023223876953126}$.

Tipp: $298023223876953125 = 5^{5^5}$.

Aufgabe 7.4 (**Charakteristisches Polynom** - *5 Punkte*)

Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom

$$\chi_M(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

und $a_0 \neq 0$.

a) Zeigen Sie: M ist invertierbar;

b) Geben Sie einen polynomialen Ausdruck für das Inverse von M an. In anderen Worten: Bestimmen Sie geeignete $b_m, \ldots, b_0 \in \mathbb{R}$ so dass

$$M^{-1} = b_m M^m + \ldots + b_1 M + b_0 E_n$$

gilt;

c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{M^{-1}}$ von M^{-1}.

Tipp zu 7.4b: Benutzen Sie den Satz von Cayley-Hamilton.