# Übungen zur Linearen Algebra 2

Sommersemester 2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat, Dr. Ernst Lexen, Blatt 8
David Guiraud, Philipp Siehr Abgabetermin: Freitag, 12.06.2015, 11 Uhr

---

**Aufgabe 8.1** (**Moduln 2** - *5 Punkte*)

Sei $R$ ein Ring und $M$ ein $R$-Modul.

a) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
   - $M$ ist frei und endlich erzeugt;
   - $M \cong R^m$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$.

b) Sei $N \subset M$ ein Untermodul. Zeigen Sie: $\ell_R(N) \leq \ell_R(M)$.

c) Sei $N \subset M$ ein Untermodul und gelte $\ell_R(M) < \infty$. Zeigen Sie: $N \neq M$ ist äquivalent zu $\ell_R(N) < \ell_R(M)$.

d) Man bestimme die Länge von $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^4$ als $\mathbb{Z}$-Modul.

**Aufgabe 8.2** (**Elementarteiler** - *3 Punkte*)

Sei $R$ ein Hauptidealring und $M \subset R^n$ ein Untermodul von Rang $n$ und sei $r_0$ der größte Elementarteiler von $M$ (d.h. für jeden Elementarteiler $r$ von $M$ gilt $r|r_0$). Zeigen Sie:

$$\mathrm{Ann}_R(R^n/M) = r_0 \cdot R.$$

**Aufgabe 8.3** (**Elementarteilersatz** - *3 Punkte*)

Sei $M$ der von $(2,4)$ und $(6,10)$ erzeugte $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Z}^2$. Bestimmen Sie mit den Methoden des Elementarteilersatzes eine Basis $\{b_1, b_2\}$ von $\mathbb{Z}^2$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ so dass

- $a_1|a_2$;
- $M = \mathbb{Z}a_1b_1 + \mathbb{Z}a_2b_2$.

**Bitte wenden**

**Aufgabe 8.4** (**Smith Normalform** - *5 Punkte*)

Bestimmen Sie die Smith Normalform folgender Matrizen. Geben Sie bei Aufgabenteil b) auch invertierbare Matrizen $S, T$ an so dass $SAT$ in Smith Normalform vorliegt.

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$.

d) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[x]^{2\times 2}$.