Übungen zur Linearen Algebra 2

Sommersemester 2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat, Dr. Ernst Lexen,
David Guiraud, Philipp Siehr

Blatt 9
Abgabetermin: Freitag, 19.06.2015, 11 Uhr

Aufgabe 9.1 (**Chinesischer Restsatz** - 2+ 2* Punkte)

a) Bestimmen Sie die Menge aller ganzen Zahlen $m \in \mathbb{N}$ welche die Kongruenzen

$$m \equiv 1 \bmod 5,\ m \equiv 2 \bmod 7,\ m \equiv 3 \bmod 11,\ m \equiv 4 \bmod 9$$

erfüllen;

b) (Zusatzpunkte) Sei R ein kommutativer Ring in dem $r^3 = r$ gilt für alle $r \in R$. Zeigen Sie:

$$R \cong R/2R \oplus R/3R.$$

Hinweis zu Aufgabenteil b): Benutzen Sie folgende Form des chinesischen Restsatzes, welcher für einen kommutativen Ring R (welcher kein Hauptidealring sein muss) gilt: Sind $I_1, \ldots, I_m$ paarweise teilerfremde Ideale (d. h. $I_i + I_j = R$ für $i \neq j$), so existiert ein Isomorphismus

$$R/\Big(\prod_{i=1,\ldots,m} I_i\Big) \cong R/I_1 \oplus \ldots \oplus R/I_m.$$

Aufgabe 9.2 (**Endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen** - 4 Punkte)

a) Sei R ein Hauptidealring, M ein endlich erzeugter Torsions-R-Modul und $P \subset R$ ein Vertretersystem der Primelemente von R. Zeigen Sie: Ist $N \subset M$ ein Untermodul, so gilt

$$N \cong \bigoplus_{p \in P} \big(M_p \cap N\big),$$

wobei M_p die im Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen vorkommenden Komponenten von M bezeichnet.

b) Bestimmen Sie die Komponenten M_p für die folgenden Moduln:
   - $M = \mathbb{R}[x]/(x^3 - 1)$ als $\mathbb{R}[x]$-Modul;
   - $M = \mathbb{C}[x]/(x^4 - 1)$ als $\mathbb{C}[x]$-Modul.

Bitte wenden

Aufgabe 9.3 (**Endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen 2** - 3 Punkte)

Sei M ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealring R mit $M_{\mathtt{tor}} \subsetneq M$. Zeigen Sie: Es existieren endlich viele freie R-Untermoduln $N_1, \ldots, N_k$ von M so dass

$$M = N_1 + \ldots + N_k.$$

Aufgabe 9.4 (**Invariante und zyklische Unterräume** - 5 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Ein Unterraum $W \subset V$ heisst f-*invariant* falls $f(W) \subset W$ gilt und f-*zyklisch* falls ein $w \in W$ existiert so dass W von der Menge $\{w, f(w), f(f(w)), \ldots\}$ erzeugt wird. (Wir schreiben dann: $\mathrm{Span}(f; w) := \langle \{w, f(w), f(f(w)), \ldots\} \rangle_K$.)

a) Sei $v \in V$. Zeigen Sie: $\mathrm{Span}(f; v)$ ist f-invariant und jeder weitere f-invariante Unterraum $W \subset V$ welcher v enthält, enthält auch $\mathrm{Span}(f; v)$.

b) Sei $W \subset V$ ein endlich-dimensionaler f-invarianter Unterraum. Zeigen Sie: W ist f-zyklisch genau dann wenn eine Basis $\mathbf{B}$ von W existiert so dass $M_{f|W,\mathbf{B},\mathbf{B}}$ von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

für geeignete $a_i \in K$ ist. (Diese Matrix wird dann die *Begleitmatrix* von $f|W$ genannt.)

c) Betrachten Sie den Fall $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}[x]$ und f der formale Ableitungsoperator. Beweisen oder widerlegen Sie f-Invarianz und f-Zyklizität in den folgenden Fällen. Falls die Voraussetzungen von Aufgabenteil 2. erfüllt sind, geben sie auch die Begleitmatrix von $f|W$ und eine entsprechende Basis $\mathbf{B}$ von W an.

- $W = V$;
- $W = \{h \in V \mid \mathrm{grad}(h) \text{ ist gerade }\} \cup \{0\}$;
- $W = \{h \in V \mid \mathrm{grad}(h) \leq 3\} \cup \{0\}$.