Übungen zur Linearen Algebra 2

Sommersemester 2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat, Dr. Ernst Lexen, Blatt 10
David Guiraud, Philipp Siehr Abgabetermin: Freitag, 26.06.2015, 11 Uhr

---

Aufgabe 10.1 (**Monogene Moduln** - 4 Punkte)

Sei R ein Hauptidealring und M ein monogener R-Modul, es gelte also $M = Rm_0$ für ein geeignetes $m_0 \in M$. Seien ausserdem $N, N' \subset M$ zwei Untermoduln.

a) Zeigen Sie:
$$I_{N,m_0} := \{r \in R \,|\, rm_0 \in N\}$$
ist ein Ideal von R und es gilt $I_{N,m_0}M = N$;

b) Zeigen Sie: N ist monogen. Was bedeutet dieses Resultat für f-invariante Unterräume eines f-zyklischen Vektorraums V (wobei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung eines K-Vektorraumes V bezeichnet)?

c) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Behauptungen:
- Es existiert ein surjektiver Modul-Homomorphismus $N \to N'$;
- Es existieren $n, n' \in M$ mit $N = Rn, N' = Rn'$ und $\mathrm{Ann}_R(n) \subset \mathrm{Ann}_R(n')$.

Hinweis: $\mathrm{Ann}_R(n) = \{r \in R \mid rn = 0\}$.

Aufgabe 10.2 (**Vektorraum als $K[x]$-Modul** - 2 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein $K[x]$-Modul. Dann können wir die Multiplikation $m_x : V \to V, v \mapsto xv$ als K-lineare Abbildung auffassen. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von m_x bezüglich der Basis $\mathbf{B}$ in den folgenden Fällen (mit $n \in \mathbb{N}, \lambda \in K$):

a) $V = K[x]/(x-\lambda)^n$ und $\mathbf{B} = (1, \overline{x}, \dots, \overline{x}^{n-1})$;

b) $V = K[x]/(x-\lambda)^n$ und $\mathbf{B} = (1, \overline{x}-\lambda, \dots, (\overline{x}-\lambda)^{n-1})$.

Bitte wenden

Aufgabe 10.3 (**Jordansche Normalform** - 4 + 2* Punkte)

Berechnen Sie die Jordansche Normalform von

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3\times 3}$.

(Zusatzpunkte: Geben Sie auch die entsprechenden Transformationsmatrizen an.)

Aufgabe 10.4 (**Jordansche Normalform 2** - 3 Punkte)

Geben Sie Repräsentanten für alle Ähnlichkeitsklassen von nilpotenten Matrizen in $\mathbb{C}^{5\times 5}$ an.