Übungen zur Linearen Algebra 2

Sommersemester 2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat, Dr. Ernst Lexen,
David Guiraud, Philipp Siehr

Blatt 11
Abgabetermin: Freitag, 03.07.2015, 11 Uhr

Aufgabe 11.1 (**Eigenwerte der Spiegelmatrizen** - *2 Punkte*)
Berechnen Sie die Eigenwerte von $R^-(\alpha) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\alpha \in [0, 2\pi]$:

$$R^-(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.2 (**Exponentialreihe für Matrizen** - *6+2* Punkte*)
In dieser Aufgabe werden wir die Verallgemeinerung von bekannten reellen Funktionen auf Matrizen kennen lernen. Sei dazu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die formale Exponentialreihe für Matrizen ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{e}^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k.$$

Nehmen Sie an, dass diese Reihe (absolut) konvergent ist.

a) Sei $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix. Bestimmen Sie e^D.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{inv}}$. Zeigen Sie: $\mathrm{e}^{SAS^{-1}} = S\mathrm{e}^A S^{-1}$.

c) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kommutierende Matrizen. Zeigen Sie: $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$.
Hinweis: Verwenden Sie das Cauchy-Produkt für Reihen.

d) Bestimmen Sie Matrizen $D, N, S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, sodass $A = S(D+N)S^{-1}$ für die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Wobei D eine Diagonalmatrix, N eine nilpotente Matrix und S invertierbar ist.

e) Bestimmen Sie e^A, für die Matrix A aus Aufgabenteil d).

f) Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$ nicht für beliebige Matrizen gilt.

Bemerkung: Mit dieser Aufgabe haben Sie gezeigt, dass e^A für Matrizen wohldefiniert ist (also die Reihe existiert), sofern das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Dieses Prinzip lässt sich auf alle Abbildungen in Potenzreihendarstellung anwenden. Zum Beispiel ist $\cos(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}$.

Bitte wenden

Aufgabe 11.3 (**Antihermitesche Matrizen** - *2 Punkte*)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ antihermitesch, d.h. $-A = A^*(= \overline{A}^\top)$. Zeigen Sie:

a) A ist normal.

b) $\mathrm{spec}(A) \subset i\mathbb{R}$.

Aufgabe 11.4 (**Nilpotente Endomorphismen** - *2 Punkte*)
Sei $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ein selbstadjungierter, nilpotenter Endomorphismus.
Zeigen Sie: $F = 0$.

Aufgabe 11.5 (**Eindeutigkeit der Jordan-Chevalley Zerlegung** - 4 Punkte)
Sei $\varphi : V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V mit vollständig zerfallendem charakteristischem Polynom.

a) Zeigen Sie, dass die im Beweis der Jordan-Chevalley Zerlegung (Satz 6.5.14c der Vorlesung) konstruierten Endomorphismen φ_D, φ_N Polynome in φ sind. (D.h. es ist zu zeigen, dass Polynome $f, g \in K[x]$ existieren, so dass $\varphi_D = f(\varphi), \varphi_N = g(\varphi)$ gilt.)

b) Seien φ'_D, φ'_N zwei weitere diagonalisierbare bzw. nilpotente Endomorphismen, welche die Bedingungen 1) und 2) der Jordan-Chevalley Zerlegung erfüllen. Zeigen Sie: $\varphi_D\varphi'_D = \varphi'_D\varphi_D$ und $\varphi_N\varphi'_N = \varphi'_N\varphi_N$.

c) Folgern Sie die Eindeutigkeit der Jordan-Chevalley Zerlegung: Seien $\varphi_{D,i}, \varphi_{N,i}$ diagonalisierbare bzw. nilpotente Endomorphismen, welche die Bedingungen 1) und 2) der Jordan-Chevalley Zerlegung erfüllen ($i = 1, 2$). Dann gilt $\varphi_{D,1} = \varphi_{D,2}$ und $\varphi_{N,1} = \varphi_{N,2}$.

Hinweise: Zu a): Wenn das charakteristische Polynom als

$$\chi_\varphi = (X - \lambda_1)^{n_1} \cdot \cdots \cdot (X - \lambda_r)^{n_r}$$

mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ zerfällt, wenden Sie den chinesischen Restsatz an um eine Lösung $p \in K[x]$ der simultanen Kongruenzen

$$p \equiv \lambda_i \mod (X - \lambda_i)^{n_i} \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

zu erhalten.
Zu c): Sie dürfen folgendes Resultat ohne Beweis benutzen: Zwei diagonalisierbare Endomorphismen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind simultan diagonalisierbar falls sie kommutieren.