Übungen zur Linearen Algebra 2

Sommersemester 2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat, Dr. Ernst Lexen, David Guiraud, Philipp Siehr

Blatt 12
Abgabetermin: Freitag, 10.07.2015, 11 Uhr

Aufgabe 12.1 (**SVD I** - *5 Punkte*)
Untersuchen Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^\top$.

b) Fertigen Sie Zeichnungen mit der Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$ und Ihrem Bild unter der Transformation durch f_A. Verdeutlichen Sie, wie sich dich beiden Einheitsvektoren transformieren.
Hinweis: Verwenden Sie die Zerlegung $A = U\Sigma V^\top$ für separate Zeichnungen.

c) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} aus der Singulärwertzerlegung.

Aufgabe 12.2 (**SVD II** - *4 Punkte*)
Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißen *orthogonal äquivalent*, falls eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert, sodass $A = QBQ^\top$. Überprüfen Sie die Richtigkeit beider Implikationen der folgenden Aussage.
„A und B sind orthogonal äquivalent, genau dann wenn sie die gleichen Singulärwerte besitzen.“

Bitte wenden

Aufgabe 12.3 (**Äußeres Produkt I** - *4 Punkte*)
Sei V ein K-Vektorraum von Dimension $n = 2m$ (mit $m \in \mathbb{N}$ gerade). Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \Lambda^m V \times \Lambda^m V \longrightarrow \Lambda^n V \qquad (x, y) \mapsto x \wedge y.$$

a) Zeigen Sie, dass φ eine symmetrische Bilinearform auf $\Lambda^m V$ definiert.

b) Zeigen Sie, dass φ nicht-ausgeartet ist auf $\Lambda^m V$. (D.h. es ist zu zeigen, dass aus $\varphi(v, w) = 0 \; \forall w \in \Lambda^m V$ bereits $v = 0$ folgt.)

c) Sei $V = K^4$ mit der Standardbasis (e_1, e_2, e_3, e_4). Dann ist

$$(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4)$$

eine Basis von $\Lambda^2 V$. Man beschreibe φ bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 12.4 (**Äußeres Produkt II** - *2 Punkte*)
Sei $f : K^3 \to K^3$ die lineare Abbildung, welche bezüglich der Standardbasis $B = (e_1, e_2, e_3)$ gegeben ist durch die Basis

$$A_{f,B,B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beschreiben Sie die lineare Abbildung

$$\Lambda^2(f) : \Lambda^2(K^3) \to \Lambda^2(K^3) \qquad x \wedge y \mapsto f(x) \wedge f(y)$$

bezüglich der Basis $(e_2 \wedge e_1, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$ von $\Lambda^2(K^3)$. (Achtung: Das ist nicht die kanonische Basis von $\Lambda^2(K^3)$ bezüglich B.)