

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG
INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
2013

BACHELORARBEIT MATHEMATIK
ZUM THEMA

Stabilisierungsmethoden für die Stokes-Gleichungen

Philipp Siehr
P.Siehr@stud.uni-heidelberg.de
Matr.-Nr. 2772186

betreut von
Prof. Dr. Thomas Richter

Abgabedatum: 1. Juli 2013

Kurzfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung von Theorie und numerischen Aspekten der Stokes-Gleichungen unter Verwendung verschiedener finite Elemente Ansätze. Hierfür wird die grundlegende Theorie der Stokes-Gleichungen betrachtet und anschließend auf Stabilisierungsmethoden eingegangen. Diese erlauben die Verwendung sogenannter *equal-order* Finite-Elemente-Ansatzräume zur Lösung der Stokes-Gleichungen.

Als erstes wird die Druckstabilisierung untersucht, die jedoch nur lineare Konvergenzordnung liefert. Diese Methode konvergiert nur im Limes ($h \rightarrow 0$) gegen das Variationsproblem der Stokes-Gleichung und ist daher eine nicht konsistente Formulierung.

Danach wird eine konsistente Stabilisierungsmethode betrachtet, die aufwändiger in der Berechnung der numerischen Lösung ist. Der Grund liegt in der Berechnung höherer Ableitungen der Basisfunktionen zur Erstellung der Systemmatrix. Diese Stabilisierung liefert aber eine verbesserte Konvergenzordnung bei höheren Finite-Elemente-Ansatzräumen.

In einer Reihe numerischer Simulationen werden numerische Resultate mit der Theorie verglichen. Der Programmiercode basiert auf der finiten Elemente Bibliothek deal.II. Zuletzt werden die stabilisierten Ansätze mit den bekannten Taylor-Hood Elementen verglichen. In dem implementierten Testfall zeigt sich, dass die Taylor-Hood Elemente den stabilisierten Ansätzen mit *equal-order* Elementen leicht überlegen sind.

Abstract

The goal of this thesis is to study the numerical theory of solutions to the Stokes equation following different approaches.

This thesis is organized as follows: we first introduce the basic theory of Stokes equations and then, two methods of stabilization will be considered. These methods allow the use of equal-order finite element spaces to solve the Stokes equations. The first method involves a pressure stabilization, which only yields linear convergence. Furthermore, this stabilization only converges in the limit ($h \rightarrow 0$) to the original Stokes equations. Therefore, it is called inconsistent.

Since our goal is to achieve a higher convergence order, we employ a different stabilization which turns out to be consistent at the expense of being mathematically more involved.

The numerical realization of these methods has been done with the software deal.II.

As expected, the consistent stabilization needs much more computing time, but is more accurate than the pressure stabilization. In the chosen test case these two stabilization schemes are outperformed by using a solver without stabilization using Taylor-Hood elements.

Danksagung

Als erstes danke ich Thomas Richter für die sehr gute Unterstützung. Ohne seine Hilfe wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Für die große Hilfe im theoretischen Abschnitt dieser Arbeit möchte ich mich bei Thomas Wick bedanken. Seine Hilfe war an vielen Stellen essentiell.

Ich danke Wolfgang Bangerth, da ich von ihm die grundlegende Programmierung mit deal.II erlernt habe.

Ebenso bedanke ich mich bei Matthias Maier, der mich in die tieferen Geheimnisse der deal.II-Programmierung eingeweiht hat.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Ansatzräume der finiten Elemente	2
1.2	Das P^2 - $P^{0,dc}$ Element und die Fortin-Bedingung	3
2	Stabilisierte finite Elemente für die Stokes-Gleichungen	7
2.1	Herleitung der modifizierten inf-sup-Bedingung	7
2.2	Existenz, Eindeutigkeit und Konvergenz	9
2.3	Beweis der a priori Abschätzungen der modifizierten Stokes-Gleichung . .	11
2.3.1	Beweis der ersten Abschätzung	11
2.3.2	Beweis des L^2 -Fehlers der Geschwindigkeit	16
3	Konsistente Stabilisierungsmethode	19
4	Numerische Realisierung	21
4.1	Das Modellproblem	21
4.1.1	Herleitung	21
4.1.2	Notation und ausformulierte Problemstellung	22
5	Numerische Ergebnisse	25
5.1	Q^1 - Q^1 finite Elemente	25
5.1.1	Konvergenztabellen	25
5.1.2	Grafiken	28
5.1.3	Auswertung	30
5.2	Q^2 - Q^2 finite Elemente	31
5.2.1	Konvergenztabellen	31
5.2.2	Grafiken	34
5.2.3	Auswertung	36
5.3	Q^3 - Q^3 finite Elemente	37
5.3.1	Konvergenztabellen	37
5.3.2	Grafiken	40
5.3.3	Auswertung	42
5.4	Q^2 - Q^1 finite Elemente	43
5.4.1	Konvergenztabellen	43
5.4.2	Grafiken	45
5.4.3	Auswertung	46
5.5	Q^3 - Q^2 finite Elemente	47
5.5.1	Konvergenztabellen	47

5.5.2	Grafiken	49
5.5.3	Auswertung	50
5.6	Konvergenz in Abhängigkeit der Rechenzeit	51
5.7	Zusammenfassung	52
5.8	Ausblick	52

1 Einleitung

In der Theorie der Navier-Stokes-Gleichungen betrachtet man zunächst grundlegende Aussagen wie Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Differentialgleichungen. Die Herausforderung liegt in der Herleitung von diskreten Lösungsmethoden und optimalen Abschätzungen der numerischen Lösungen.

Wir betrachten im Folgenden nicht die Navier-Stokes-Gleichungen, sondern den Spezialfall der Stokes-Gleichungen mit konformen finiten Elementen. Es wird $v_h \in V_h \subseteq V = H_0^1(\Omega)^d$ und $p_h \in Q_h \subseteq Q = L_0^2(\Omega)$ gesucht, sodass die variationelle Formulierung für ein $f \in L^2(\Omega)$

$$(\nu \nabla v_h, \nabla \phi_h) - (p_h, \nabla \cdot \phi_h) = (f, \phi_h) \quad \forall \phi_h \in V_h, \quad (1.1a)$$

$$(\nabla \cdot v_h, \xi_h) = 0 \quad \forall \xi_h \in Q_h, \quad (1.1b)$$

mit Dirichlet-Randwerten auf dem kompletten Rand $\partial\Omega$ erfüllt ist. Dabei ist der Raum $L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega), (q, 1)_\Omega = 0\}$. Um die Theorie und die numerische Berechnung auf das Wesentliche zu reduzieren, nehmen wir im Folgenden immer an, dass die Viskosität $\nu = 1$ ist. Alle nachfolgenden Resultate bleiben bei anderer Viskosität, gegebenenfalls mit davon abhängigen Konstanten, erfüllt.

Im Folgenden möchten wir uns zunächst mit grundlegenden Resultaten beschäftigen. Dies werden wir im Stile von [13] tun. Die Beweise der nachfolgenden Sätze sind dort zu finden.

Gute Ergebnisse können wir erwarten, sofern wir *inf-sup-stabile Ansatzräume* verwenden, um die Gleichungen zu lösen. Ein erstes Resultat ist der folgende Satz.

Satz 1 (Existenz und Eindeutigkeit für Stokes-elemente)

Seien $V_h \times Q_h \subseteq V \times Q$ konforme Finite-Elemente-Räume, welche die inf-sup-Bedingung

$$\min_{q_h \in Q_h} \max_{\phi_h \in V_h} \frac{(q_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|q_h\| \|\nabla \phi_h\|} \geq \gamma_h \geq \gamma > 0 \quad (1.2)$$

erfüllen. Dann existiert für jede „rechte Seite“ $f \in H^{-1}(\Omega)^d$ eine eindeutige Lösung $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$ der Stokes-Gleichung. Weiter gilt die Stabilitätsabschätzung

$$\|\nabla v_h\| + \gamma_h \|p_h\| \leq c \|f\|_{-1}.$$

Im Beweis des Satzes in [13] wird ersichtlich, dass man immer eine eindeutige Geschwindigkeit v_h und einen Druck p_h als Lösung erhält, sofern ein konformer Ansatzraum $V_h \times Q_h$ gewählt wird. Der Druck p_h ist genau dann eindeutig, wenn die inf-sup-Bedingung erfüllt ist.

Zum Design numerischer Algorithmen reicht die Lösbarkeit nicht und weitere Ergebnisse über das Konvergenzverhalten der Diskretisierung sind wünschenswert. Ein wichtiges Resultat ist der a priori Konvergenzsatz.

Satz 2 (A priori Abschätzung der Stokes-Gleichungen)

Sei $V_h \times Q_h$ ein konformer Ansatzraum, welcher die (diskrete) inf-sup-Bedingung (1.2) erfüllt. Sei weiter $\{r_v, r_p\} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $r_p < r_v$ die Ordnung dieses Ansatzraumes. Gilt für das Lösungspaar $\{v, p\}$, dass $v \in H_0^1(\Omega)^d \cap H^{r_v+1}(\Omega)^d$ und $p \in L_0^2(\Omega) \cap H^{r_p+1}(\Omega)$, so gelten die a priori Abschätzungen für die finite Elemente Approximation $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$:

$$\|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| \leq \frac{c}{\gamma_h} \{h^{r_v} \|\nabla^{r_v} v\| + h^{r_p+1} \|\nabla^{r_p+1} p\|\} \quad (1.3)$$

$$\|v - v_h\| \leq \frac{c}{\gamma_h} \{h^{r_v+1} \|\nabla^{r_v+1} v\| + h^{r_p+2} \|\nabla^{r_p+1} p\|\} \quad (1.4)$$

mit der inf-sup Konstanten γ_h .

Mit dieser Abschätzung kommen wir auch direkt in die Thematik der Ansatzräume, welche im Folgenden behandelt wird.

1.1 Die Ansatzräume der finiten Elemente

Als Ansatzräume betrachten wir Polynomräume auf zweidimensionalen Drei- und Vierecksgittern Ω_h :

$$\mathbb{P}^r := \langle x^\alpha y^\beta, 0 \leq \alpha + \beta \leq r \rangle, \quad \mathbb{Q}^r := \langle x^\alpha y^\beta, 0 \leq \alpha, \beta \leq r \rangle.$$

Die stetigen Finite-Elemente-Räume sind damit über

$$P^r := \{\phi \in C(\Omega) : \phi|_K \in \mathbb{P}^r\}, \quad Q^r := \{\phi \in C(\Omega) : \phi|_K \in \mathbb{Q}^r\}$$

definiert, die unstetigen erschließen sich mit

$$P^{r,\text{dc}} := \{\phi \in L^2(\Omega) : \phi|_K \in \mathbb{P}^r\}, \quad Q^{r,\text{dc}} := \{\phi \in L^2(\Omega) : \phi|_K \in \mathbb{Q}^r\}.$$

Ansatz- und Testräume in höheren Dimensionen lassen sich analog formulieren (vgl. [13, S. 55]). Die große Problematik ergibt sich nun bei der Suche geeigneter Ansatzräume. In der bisherigen Theorie benötigen wir inf-sup-stabile Ansätze, die möglichst einfache Struktur haben und balancierte (optimale) Konvergenzordnung liefern. Um die optimale Konvergenzordnung zu erreichen, sollte man nach Satz 2 die Ordnungen der Räume mit $r_v = r_p + 1$ wählen. Doch bereits einfache Räume, wie der P^1 - $P^{0,\text{dc}}$, erfüllen die inf-sup-Bedingung nicht. Nur durch eine kompliziertere Konstruktion über eine Bulb-Funktion ist es möglich, diese Räume anzureichern und damit zu stabilisieren.

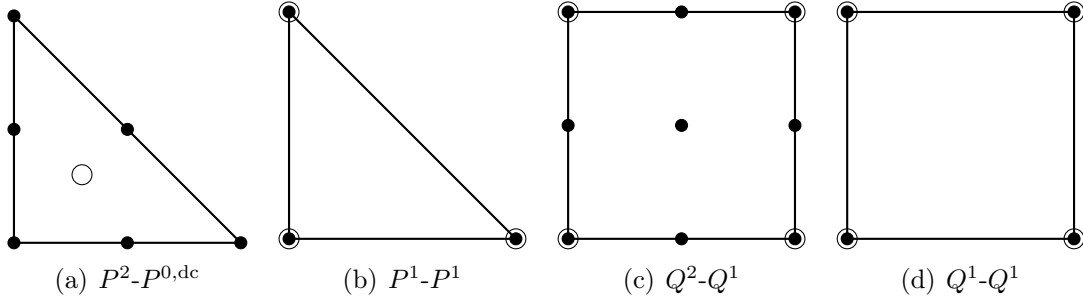


Abbildung 1.1: Beispiele für Stokes-Elemente. Das $P^2-P^{0,dc}$ und das Q^2-Q^1 Taylor-Hood-Element erfüllt die inf-sup-Bedingung, die *equal-order* Elemente P^1-P^1 und Q^1-Q^1 erfüllen sie nicht. Die Freiheitsgrade der Geschwindigkeit sind mit Punkten, die Freiheitsgrade des Druckes mit Kreisen gekennzeichnet.

Durch Ansatzräume höherer Ordnung, z.B. das Taylor-Hood Element P^2-P^1 , ist es möglich, inf-sup-stabile Räume zu wählen. Der Nachweis der Stabilität von Ansatzräumen ist im Allgemeinen jedoch sehr schwierig, wie wir nachfolgend sehen werden. Beispiele für die Elemente, die in dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen, sind in Abbildung 1.1 mit ihren Freiheitsgraden visualisiert.

Unser Ziel ist es, die Theorie der inf-sup-stabilen Ansatzräume auf nicht inf-sup-stabile *equal-order Ansätze* der Form P^k-P^k und Q^k-Q^k zu erweitern. Diese Räume haben ihren Vorteil in der praktische Anwendung, da bei gleichen finiten Elementen die gleichen Freiheitsgrade verwendet werden und somit auch die gleiche Implementierung genutzt werden kann. Um die Problematik bei inf-sup-stabilen Ansatzräumen zu verdeutlichen, betrachten wir zunächst den Nachweis der Stabilität des $P^2-P^{0,dc}$ Elementes. Der nachfolgende Satz 3 der Fortin-Bedingung wird uns anschließend als Motivation der druckstabilisierten Stokes-Gleichungen dienen.

1.2 Das $P^2-P^{0,dc}$ Element und die Fortin-Bedingung

Das $P^2-P^{0,dc}$ Element ist mit quadratischen Geschwindigkeiten und stückweise konstantem Druck ein relativ einfacher Ansatz. Allerdings kann man bereits jetzt sehen, dass dieses Element nicht von optimaler Ordnung ($\mathcal{O}(h^2)$) sein wird, da höchstens eine h -Potenz im Druck zu erwarten ist.

Um die inf-sup Stabilität beweisen zu können, benötigen wir zunächst einen allgemeinen Satz, der den Nachweis erleichtert.

Satz 3 (Fortin-Bedingung)

Sei $V_h \times Q_h \subseteq V \times Q$ ein finite Elemente Ansatz und $\pi_h : V \rightarrow V_h$ ein Projektionsoperator mit den Eigenschaften:

$$(\xi_h, \nabla \cdot (\phi - \pi_h \phi)) = 0 \quad \forall \xi_h \in Q_h, \quad \|\nabla \pi_h \phi\| \leq c_\pi \|\nabla \phi\| \quad \forall \phi \in V.$$

Dann erfüllt $V_h \times Q_h$ die diskrete inf-sup-Bedingung:

$$\min_{q_h \in Q_h} \max_{\phi_h \in V_h} \frac{(q_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|q_h\| \|\nabla \phi_h\|} \geq \frac{\gamma_0}{c_\pi} > 0.$$

Bemerkung: Mit Hilfe dieses Satzes haben wir nun ein Werkzeug zur Bestimmung der inf-sub-Stabilität verschiedener Ansatzräume. Ein geeigneter Projektionsoperator ist durch die Clément-Interpolierende $C_h \phi$ gegeben, denn diese erfüllt nach [11, S. 70ff.] die H^1 -Stabilität. Da der Beweis der Fortin-Bedingung wichtig für die nachfolgenden Kapitel ist, werden wir diesen im Detail durchführen.

Beweis. Es gilt für jedes $q_h \in Q_h \subseteq Q = L_0^2(\Omega)$ aufgrund der Konformität des Ansatzes mit jedem $\phi_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} \gamma_0 \|q_h\| &\leq \sup_{\phi \in V} \frac{(q_h, \nabla \cdot \phi)}{\|\nabla \phi\|} \\ &= \sup_{\phi \in V} \frac{(q_h, \nabla \cdot (\phi - \phi_h + \phi_h))}{\|\nabla \phi\|} \\ &\leq \sup_{\phi \in V} \frac{(q_h, \nabla \cdot (\phi - \phi_h))}{\|\nabla \phi\|} + \sup_{\phi \in V} \frac{(q_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|} \frac{\|\nabla \phi_h\|}{\|\nabla \phi\|}. \end{aligned}$$

Mit der Setzung $\phi_h := \pi_h \phi$ und unter Ausnutzung der Voraussetzungen an die Projektion ergibt sich:

$$\gamma_0 \|q_h\| \leq c_\pi \sup_{\phi \in V} \frac{(q_h, \nabla \cdot \pi_h \phi)}{\|\nabla \pi_h \phi\|} \leq c_\pi \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{(q_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|}.$$

□

Um die inf-sup Stabilität des P^2 - $P^{0,dc}$ Ansatzes zu zeigen, wollen wir nun die Eigenschaft der Projektion aus Satz 3 nachrechnen, bzw. die Projektion daraus konstruieren. Unter Verwendung des ersten Kriteriums der Fortin-Bedingung gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} (\xi_h, \nabla \cdot (\phi - \pi_h \phi)) = \sum_{K \in \Omega_h} (\xi_h, \nabla \cdot (\phi - \pi_h \phi))_K \\ &= \sum_{K \in \Omega_h} \{(\xi_h, n \cdot (\phi - \pi_h \phi))_{\partial K} - (\nabla \xi_h, \phi - \pi_h \phi)_K\}. \end{aligned}$$

Da $\xi_h \in P^{0,dc}$ eine stückweise konstante Funktion ist, gilt $\nabla \xi_h = 0 \forall K \in \Omega_h$. Somit muss

$$\int_e n \cdot (\phi - \pi_h \phi) ds = 0 \tag{1.5}$$

für jede Kante e der drei Kanten eines Elements $K \in \Omega_h$ gelten. Dies ist ohne Probleme möglich, da wir bisher nur $\phi_h \in P^2$ gefordert haben. Dies bedeutet, dass wir zwei Freiheitsgrade für die Geschwindigkeit entlang jeder Kante benötigen. Über die Eckpunkte

lassen sich diese beiden Freiheitsgrade festlegen. Damit bleibt ein Freiheitsgrad in der Mitte jeder Kante zur freien Verfügung. Diesen verwenden wir für zur Setzung von (1.5). Wir konstruieren nun $\pi_h = C_h + E_h$ mit der Clément-Interpolierenden C_h , die über die Kantenknoten bestimmt ist und einer weiteren Interpolierenden E_h , die nachfolgend bestimmt wird. Zunächst gilt für die Clément-Interpolierende C_h die H^1 -Stabilität und damit die zweite Voraussetzung der Fortin-Bedingung

$$\begin{aligned}\|\nabla C_h \phi\| &= \sum_{K \in \Omega_h} \|C_h \phi\|_K \\ &= \sum_{K \in \Omega_h} \|\nabla \phi\|_{\tilde{P}_K} \leq \tilde{c} \|\nabla \phi\|.\end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis möchten wir ebenfalls für E_h erhalten. Nach (1.5) gilt

$$\int_e n \cdot E_h \phi \, ds = \int_e n \cdot (\phi - C_h \phi) \, ds.$$

Um die nachfolgende Rechnung zu vereinfachen, betrachten wir die stärkere Bedingung

$$\int_e E_h \phi \, ds = \int_e (\phi - C_h \phi) \, ds.$$

Mit Hilfe des Freiheitsgrades auf der Kante sei nun $E_h \phi|_e = E_e \phi_e$, mit $E_e \in \mathbb{R}$ und ϕ_e die Basisfunktion 2. Grades mit $\phi_e = 1$ auf dem Kantenknoten der Kante e und $\phi_e = 0$ an allen anderen Knotenpunkten von K . Damit ist direkt auch E_e gegeben, denn es gilt

$$E_e = \frac{\int_e \phi - C_h \phi \, ds}{\int_e \phi_e \, ds}.$$

Noch zu zeigen ist $\|\nabla E_h \phi\| \leq \|\nabla \phi\|$. Es gilt

$$\|\nabla E_h \phi\| = \frac{|\int_e \phi - C_h \phi \, ds|}{|\int_e \phi_e \, ds|} \|\nabla \phi_e\|. \quad (1.6)$$

Für den Zähler des Koeffizienten folgern wir mit der Hölder-Ungleichung und der Interpolationsabschätzung über Kanten [11, S. 71]

$$\begin{aligned}\left| \int_e \phi - C_h \phi \, ds \right| &\leq \|\phi - C_h \phi\|_{L^1(e)} \\ &\leq \|\phi - C_h \phi\|_{L^2(e)} \|1\|_{L^2(e)} \\ &\leq \tilde{c} h^{\frac{1}{2}} \|\nabla \phi\|_{\tilde{P}(e)} h^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \tilde{c} h \|\nabla \phi\|.\end{aligned} \quad (1.7)$$

Für den Nenner gilt $|\int_e \phi_e \, ds| = \mathcal{O}(h)$, da durch Transformation $\phi_e \hat{=} -\frac{4}{h^2}x^2 + \frac{4}{h}x$ in $[0, h]$. Der hintere Faktor in (1.6) verhält sich wie $\mathcal{O}(1)$, denn es gilt für die „Steigung“

$|\nabla\phi_e| = \mathcal{O}(\frac{1}{h})$. Betrachte hierzu, dass die maximale Steigung im Querschnitt durch den Knotenpunkt auf e und den gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks gegeben ist, siehe Abb 1.2. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla\phi_e\|_K &= \left(\int_K |\nabla\phi_e|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\doteq \left(\int_K h^{-2} ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= h^{-1} \|1\|_{L^2(K)} \\ &\leq h^{-1} (h^2)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{O}(1). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Setzen wir (1.7) und (1.8) in (1.6), erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\nabla\pi_h\phi\| &= \|\nabla(C_h\phi + E_h\phi)\| \leq \|\nabla C_h\phi\| + \|\nabla E_h\phi\| \\ &\leq \tilde{c}\|\nabla\phi\| + c'\|\nabla\phi\| = c_\pi\|\nabla\phi\|. \end{aligned}$$

Dies entspricht gerade dem zu zeigenden zweiten Kriterium der Fortin-Bedingung. Mit dieser ergibt sich nun die inf-sup Stabilität von P^2 - $P^{0,dc}$. Mit Satz 2 liefert uns dies auch direkt eine a priori Schätzung der Form

$$\|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| \leq \frac{cc_\pi}{\gamma_0} \{h^2\|\nabla^2 v\| + h\|\nabla p\|\},$$

welche die erwartete lineare Konvergenz liefert.

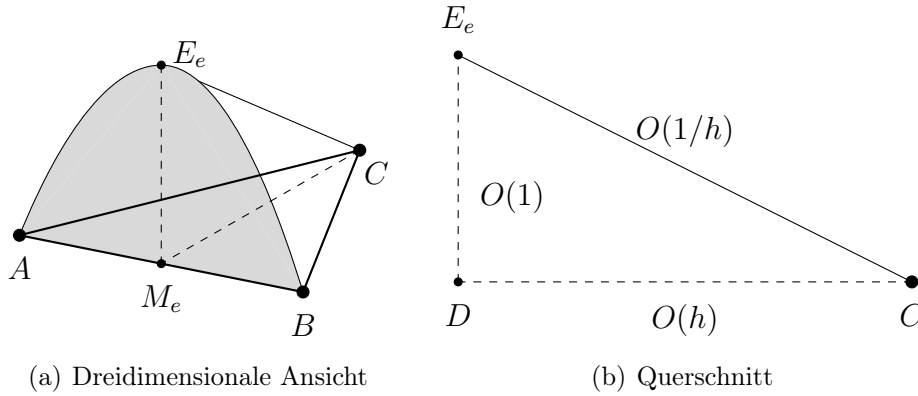


Abbildung 1.2: Die Basisfunktion $E_e\phi$ auf der Zelle $T = \overline{ABC}$ ist 0 auf $\partial T \setminus e$, also insbesondere in den Eckpunkten und hat den Wert E_e in der zugehörigen Kantenmitte M_e . Sie ist quadratisch entlang der zugehörigen Kante e .

Dieser Nachweis der Stabilität des vergleichsweise einfachen P^2 - $P^{0,dc}$ Elementes zeigt bereits wie aufwändig der Nachweis für Finite-Elemente-Räume werden kann. Dies motiviert insbesondere den Nachweis der inf-sup Stabilität zu umgehen und nicht stabile Ansätze zu verwenden.

2 Stabilisierte finite Elemente für die Stokes-Gleichungen

Die Idee, die zu den stabilisierten Stokes-Gleichungen führt, beruht darauf *equal-order Ansätze* der Form P^k - P^k auf einem Dreiecksgitter oder Q^k - Q^k für Vierecksgitter zu verwenden. Diese sind nicht inf-sup stabil, sodass wir zunächst keine eindeutige Lösung der Stokes-Gleichungen erwarten dürfen. Wir werden im Folgenden sehen, dass wir auf natürliche Weise eine Modifikation der Stokes-Gleichungen erhalten, für die wir eine eindeutige Lösung $\{v_h, p_h\}$ erhalten werden.

2.1 Herleitung der modifizierten inf-sup-Bedingung

Wir betrachten hierzu den Beweis zur Fortin-Bedingung (Satz 3), die die inf-sup Stabilität bei konformen Ansätzen garantiert. Der erste Schritt im Beweis ist die Verwendung der inf-sup-Bedingung im Raum $V \times Q$ auf ein beliebiges $p_h \in Q_h \subseteq Q$:

$$\gamma \|p_h\| \leq \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \nabla \cdot \phi)}{\|\nabla \phi\|}.$$

Anschließend wird ϕ_h im Zähler eingeschoben, das Skalarprodukt auseinander gezogen und ein Faktor eingefügt:

$$\gamma \|p_h\| \leq \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \nabla \cdot (\phi - \phi_h))}{\|\nabla \phi\|} + \sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|} \frac{\|\nabla \phi_h\|}{\|\nabla \phi\|}. \quad (2.1)$$

Wir ersetzen ϕ_h durch die H^1 -stabile Clément-Interpolierende $C_h \phi$. Würde nun die Orthogonalitätsbedingung aus der Fortin-Bedingung ebenso gelten, dann wären die Räume $V_h \times Q_h$ inf-sup-stabil. Wir nehmen demnach an, dass die Orthogonalitätsbedingung nicht erfüllt ist und schätzen zunächst den hinteren Summanden ab:

$$\sup_{\phi \in V} \frac{(p_h, \nabla \cdot C_h \phi)}{\|\nabla C_h \phi\|} \frac{\|\nabla C_h \phi\|}{\|\nabla \phi\|} \leq c_i \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{(p_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|}.$$

Nun müssen wir noch den ersten Summanden der rechten Seite in der Ungleichung (2.1) abschätzen. Wir summieren zunächst über alle Zellen $K \in \Omega_h$ und integrieren partiell. Die Randintegrale fallen auf Grund der Dirichlet-Randbedingung, sowie im Inneren

durch entgegengesetzte Normalenrichtung, weg.

$$\begin{aligned}
|(p_h, \nabla \cdot (\phi - C_h \phi))| &= \left| \sum_{K \in \Omega_h} (p_h, \nabla \cdot (\phi - C_h \phi))_K \right| \\
&= \left| \sum_{K \in \Omega_h} -(\nabla p_h, \phi - C_h \phi)_K + (p_h, n \cdot (\phi - C_h \phi))_{\partial K} \right| \\
&\leq \sum_{K \in \Omega_h} |(\nabla p_h, \phi - C_h \phi)_K|.
\end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und den Standardabschätzungen für Interpolationen [9, S. 110], sowie der Konstanten c_p , welche abhängig vom Überlappungsgrad der Patches ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
|(p_h, \nabla \cdot (\phi - C_h \phi))| &\leq \sum_{K \in \Omega_h} \|\nabla p_h\|_K \|\phi - C_h \phi\|_K \\
&\leq c_i \sum_{K \in \Omega_h} h_K \|\nabla p_h\|_K \|\nabla \phi\|_{P(K)} \\
&\leq c_i \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \Omega_h} \|\nabla \phi\|_{P(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_i c_p \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla \phi\|
\end{aligned}$$

Beide Abschätzungen setzen wir nun wieder in Gleichung (2.1) ein und erhalten die *modifizierte inf-sup-Bedingung*. Für alle $p_h \in Q_h$ gilt:

$$\tilde{\gamma} \|p_h\| \leq \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{(p_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|} + \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

Insbesondere hängt der „Störterm“ von h ab, sodass die modifizierte inf-sup-Bedingung für $h \rightarrow 0$ gegen die ursprüngliche inf-sup-Bedingung (1.2) konvergiert. Dies ermutigt zu einer neuen Formulierung des Stokes-Problemes. Mit einem Stabilisierungsparameter $\alpha_0 > 0$ suche nun $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$, sodass

$$(\nabla v_h, \nabla \phi_h) - (p_h, \nabla \cdot \phi_h) = (f, \phi_h) \quad \forall \phi_h \in V_h, \quad (2.3a)$$

$$(\nabla \cdot v_h, \xi_h) + \alpha_0 \sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 (\nabla p_h, \nabla \xi_h)_K = 0 \quad \forall \xi_h \in Q_h. \quad (2.3b)$$

Auch hier gilt, dass das modifizierte Problem für $h \rightarrow 0$ gegen das ursprüngliche konvergiert. Da jedoch eine starke Lösung diese Gleichung nicht löst, sondern nur im Limes

das gleiche Ergebnis liefert, handelt es sich hierbei um ein nicht konsistentes Verfahren. Wir wollen nun, wie auch bereits bei der ursprünglichen Formulierung, Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit sowie Konvergenz im Zusammenhang mit dem Grad unseres Ansatzraumes überprüfen. Kommen wir also gleich zum ersten Satz, der uns zudem die stetige Abhängigkeit von den Daten liefert.

2.2 Existenz, Eindeutigkeit und Konvergenz

Wie bereits bei den Stokes-Gleichungen werden wir im Folgenden auch Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit, sowie zwei a priori Abschätzungen herleiten.

Satz 4 (Existenz und Eindeutigkeit des modifizierten Stokes-Schemas)

Das modifizierte Stokes Problem (2.3) besitzt eine eindeutige Lösung $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$ und ist im folgenden Sinne stabil (stetig abhängig von den Daten):

$$\|\nabla v_h\| + \|p_h\| + \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|p_h\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \|f\|.$$

Beweis. Da wir ein lineares und endlichdimensionales Problem untersuchen, genügt es die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen. Wir wählen hierzu $\xi_h := p_h$ und $\phi_h := v_h$ und erhalten aus (2.3) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \|\nabla v_h\|^2 - (p_h, \nabla \cdot v_h) &= (f, v_h) \text{ und} \\ (\nabla \cdot v_h, p_h) + \alpha_0 \sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_K^2 &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir die zweite Gleichung in die obere ein, liefert uns diese unter Anwendung der Youngschen Ungleichung

$$\|\nabla v_h\|^2 + \alpha_0 \sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_K^2 = (f, v_h) \leq c_p \|f\| \|\nabla v_h\| \leq \frac{c_p}{4} \|f\|^2 + c_p^{-1} \|\nabla v_h\|^2.$$

Insbesondere also auch

$$\|\nabla v_h\|^2 + \alpha_0 \sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_K^2 = (f, v_h) \leq \tilde{c} \|f\|^2. \quad (2.4)$$

Mit der homogenen Problemstellung $f \equiv 0$ und der Poincaré-Ungleichung folgt $\nabla v_h = 0$ und mit homogenen Dirichlet-Rändern $v_h = 0$, sowie $\nabla p_h = 0$. Weiter folgt mit der

modifizierten inf-sup-Bedingung (2.2):

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}\|p_h\| &\leq \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{(p_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|} + \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{(\nabla v_h, \nabla \phi_h) - (f, \phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|} + \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{\|\nabla v_h\| \|\nabla \phi_h\| + c_p \|f\| \|\nabla \phi_h\|}{\|\nabla \phi_h\|} + \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\nabla v_h\| + c_p \|f\| + \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Damit ist die eindeutige Existenz einer Lösung gesichert. Aus Ungleichung (2.4) folgt nun

$$\|\nabla v_h\| \leq \sqrt{\tilde{c}} \|f\|, \quad \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\tilde{c}\alpha_0^{-1}} \|f\|.$$

Setzen wir dies in (2.5) ein, erhalten wir weiter die gewünschte Stabilitätsabschätzung

$$\|\nabla v_h\| + \|p_h\| + \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|p_h\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma^{-1} \left((2\sqrt{\tilde{c}} + c_p) + 2\sqrt{\tilde{c}\alpha_0^{-1}} \right) \|f\| = c \|f\|.$$

□

Nachdem wir nun gezeigt haben, dass immer eine eindeutige Lösung der modifizierten Stokes-Gleichungen existiert, ist es von großem Interesse, ob diese Lösung auch wirklich die ursprünglichen Stokes-Gleichungen löst und mit welcher Ordnung diese gegen die Lösung konvergiert. Da im Störterm eine h^2 -Potenz steht, können wir nur eine maximale Ordnung von $\mathcal{O}(h)$ erhalten. Im Beweis des nachfolgenden Satzes wird dies ersichtlich.

Satz 5 (A priori Abschätzung des modifizierten Stokes-Schemas.)

Für die Lösung $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$ des modifizierten Stokes-Schemas (2.3) gilt, sofern $v \in V \cap H^2(\Omega)$ und $p \in Q \cap H^1(\Omega)$, die a priori Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| &\leq ch(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|), \\
\|v - v_h\| &\leq ch^2(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Sofern die Lösung höhere Regularität besitzt, gewinnt man keine weiteren h -Potenzen. Der Beweis dieses Satzes ist aufwändiger als die bisher gezeigten Resultate und wird daher in Abschnitt 2.3 in kleinere Schritte unterteilt. Der nachfolgende Beweis wird im Stile von [3] und [5] gehalten.

2.3 Beweis der a priori Abschätzungen der modifizierten Stokes-Gleichung

2.3.1 Beweis der ersten Abschätzung

Zu zeigen ist die folgende Abschätzung von Satz 5 für $v \in V \cap H^2(\Omega)$ und $p \in Q \cap H^1(\Omega)$:

$$\|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| \leq ch(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|).$$

Der Beweis für diese Aussage erfordert einige Vorarbeit, welche im Folgenden erledigt wird. Um im Beweis die wesentlichen Inhalte kompakter darzustellen, benötigen wir zunächst zwei neue Bezeichnungen.

Definition 6 (Tripelnorm und Bilinearform.)

Wir definieren die Tripelnorm für $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$ mit

$$\|(v_h, p_h)\| := \left(\|\nabla v_h\|^2 + \|p_h\|^2 + \sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

und die Bilinearform aus der modifizierten Stokes-Gleichung

$$A_h((v_h, p_h); (\phi_h, \xi_h)) := (\nabla v_h, \nabla \phi_h) - (p_h, \nabla \cdot \phi_h) + (\nabla \cdot v_h, \xi_h) + S_h(p_h, \xi_h),$$

mit dem Modifikationsterm $S_h(p_h, \xi_h) := \alpha_0 \sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 (\nabla p_h, \nabla \xi_h)_K$.

Diese Bilinearform entspricht gerade der linken Seite der modifizierten Stokes-Gleichung. Um den eigentlichen Beweis so kurz wie möglich zu halten, werden in den folgenden Lemmata bereits einige Teile des Beweises gezeigt.

Lemma 7

Seien die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt, also insbesondere $v \in V \cap H^2(\Omega)$ und $p \in Q \cap H^1(\Omega)$, und sei die Abschätzung $\|(v - v_h, p - p_h)\| \leq \tilde{c}h(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|)$ gültig. Dann gilt die a priori Abschätzung

$$\|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| \leq ch(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|)$$

Beweis. Für $u := v - v_h$ und $q := p - p_h$ gilt

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2 &\leq \|\nabla u\|^2 + \|q\|^2 + \sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla q\|_K^2 \\ &= \|(u, q)\|^2 \leq (\tilde{c}h(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|))^2. \end{aligned}$$

Durch ziehen der Wurzel und analoges Vorgehen bei $p - p_h$ liefert dies das erwünschte Ergebnis mit $c = 2\tilde{c}$. \square

Lemma 8

Unter den Voraussetzungen von Satz 5 gibt es eine Konstante $\gamma > 0$, sodass die Ungleichung

$$\inf_{\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h} \sup_{\{\phi_h, \xi_h\} \in V_h \times Q_h} \frac{A_h((v_h, p_h); (\phi_h, \xi_h))}{\| (v_h, p_h) \| \| (\phi_h, \xi_h) \|} \geq \gamma$$

erfüllt ist.

Beweis. Wir werden nicht obige Formulierung, sondern eine äquivalente Aussage beweisen. Zu zeigen ist damit

$$\sup_{\substack{\{\phi_h, \xi_h\} \in V_h \times Q_h \\ \|(\phi_h, \xi_h)\| = 1}} A_h((v_h, p_h); (\phi_h, \xi_h)) \geq \gamma \| (v_h, p_h) \|. \quad (2.6)$$

Zunächst setzen wir $\phi_h^1 := v_h$ und $\xi_h^1 := p_h$ und erhalten mit Definition 6 die erste Gleichung

$$A_h((v_h, p_h); (v_h, p_h)) = \|\nabla v_h\|^2 + S_h(p_h, p_h). \quad (2.7)$$

Weiter gilt mit $\phi_h^2 := -\|p_h\|\tilde{v}_h$, wobei $\tilde{v}_h := c_s^{-1}\pi_h v_h$ und $\xi_h^2 := 0$ auch

$$\begin{aligned} A_h((v_h, p_h); (\phi_h^2, 0)) &= -(\nabla v_h, \nabla \tilde{v}_h \|p_h\|) + (p_h, \nabla \cdot \tilde{v}_h \|p_h\|) \\ &= \|p_h\| \{ (p_h, \nabla \cdot \tilde{v}_h) - (\nabla v_h, \nabla \tilde{v}_h) \}. \end{aligned}$$

Im Folgenden werden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die modifizierte inf-sup-Bedingung (2.2) unter Ausnutzung von $\|\nabla \tilde{v}_h\| \leq 1$ verwendet. Da wir nur v_h und p_h mit $\| (v_h, p_h) \| = 1$ (siehe (2.6)) untersuchen, gilt $\|\nabla v_h\| \leq 1$ und somit aufgrund der Konstruktion der Interpolierenden $\|\nabla \tilde{v}_h\| \leq 1$, da diese H^1 -stabil ist. Es gilt damit

$$\begin{aligned} A_h((v_h, p_h); (\phi_h^2, 0)) &\geq \|p_h\| \{ \tilde{\gamma} \|p_h\| - S_h(p_h, p_h) - \|\nabla v_h\| \|\nabla \tilde{v}_h\| \} \\ &\geq \|p_h\| \{ \tilde{\gamma} \|p_h\| - S_h(p_h, p_h) - \|\nabla v_h\| \} \\ &= \tilde{\gamma} \|p_h\|^2 - \|p_h\| S_h(p_h, p_h) - \|\nabla v_h\| \|p_h\|, \end{aligned}$$

mit der Konstanten $\tilde{\gamma} \geq 0$ der modifizierten inf-sup-Bedingung. Die Youngsche Ungleichung $-ab \geq -\varepsilon^{-1}a^2 - \varepsilon b^2$ liefert bei Anwendung auf die rechten beiden Summanden mit $\varepsilon = 4\tilde{\gamma}^{-1}$

$$A_h((v_h, p_h); (\phi_h^2, 0)) \geq -4\tilde{\gamma}^{-1} \|\nabla v_h\|^2 + \frac{\tilde{\gamma}}{2} \|p_h\|^2 - 4\tilde{\gamma}^{-1} S_h(p_h, p_h). \quad (2.8)$$

Die Wahl $\phi_h := \phi_h^1 + \frac{\tilde{\gamma}}{8}\phi_h^2$ sowie $\xi_h := \xi_h^1 + \frac{\tilde{\gamma}}{8}\xi_h^2$ und die Verwendung der hergeleiteten Abschätzungen (2.7) und (2.8) liefern

$$\begin{aligned} A_h((v_h, p_h); (\phi_h, \xi_h)) &\geq \frac{1}{2} \|\nabla v_h\|^2 + \frac{\tilde{\gamma}^2}{16} \|p_h\|^2 + \frac{1}{2} S_h(p_h, p_h) \\ &\geq c_1 \| (v_h, p_h) \|^2, \end{aligned}$$

mit $c_1 := \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\tilde{\gamma}^2}{16} \right\}$. Das Tupel $\{\phi_h, \xi_h\}$ normieren wir nun noch geschickt. Hierzu schätzen wir mit Hilfe der Binomischen Formeln sowie der Definition der Tripelnorm ab:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\!(\phi_h, \xi_h)\!\|^2 &\leq \|\!(\phi_h^1, \xi_h^1)\!\|^2 + \frac{\tilde{\gamma}^2}{64} \|\!(\phi_h^2, \xi_h^2)\!\|^2 \\ &= \|(v_h, p_h)\|^2 + \frac{\tilde{\gamma}^2}{64} \|p_h\|^2 \|\nabla \tilde{v}_h\|^2 \\ &\leq \|(v_h, p_h)\|^2 + \frac{\tilde{\gamma}^2}{64} \|p_h\|^2 \\ &\leq c_2 \|(v_h, p_h)\|^2. \end{aligned}$$

Die Konstante c_2 ist somit $1 + \frac{\tilde{\gamma}^2}{64}$.

Setzen wir nun unsere normierten Testfunktionen $\tilde{\phi}_h := \phi_h \|\!(\phi_h, \xi_h)\!\|^{-1}$ und $\tilde{\xi}_h := \xi_h \|\!(\phi_h, \xi_h)\!\|^{-1}$, erhalten wir die gewünschte Abschätzung

$$A_h \left((v_h, p_h); (\tilde{\phi}_h, \tilde{\xi}_h) \right) \geq \gamma \|(v_h, p_h)\|.$$

□

Lemma 9

Unter den Voraussetzungen des Satzes 5 gilt

$$\|(v - \pi_h v, p - \pi_h p)\| \leq ch(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|).$$

Dabei seien die jeweiligen Interpolierenden von v und p mit π_h bezeichnet.

Beweis. Für $v \in V \cap H^2(\Omega)$ und $p \in Q \cap H^1(\Omega)$ mit den jeweiligen Interpolierenden π_h gilt mit den Interpolationsabschätzungen direkt

$$\begin{aligned} \|(v - \pi_h v, p - \pi_h p)\|^2 &= \|\nabla(v - \pi_h v)\|^2 + \|p - \pi_h p\|^2 + \sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla(p - \pi_h p)\|_K^2 \\ &\leq ch^2 \|\nabla^2 v\|^2 + ch^2 \|\nabla p\|^2 + \sum_{K \in \Omega_h} ch_K^2 \|\nabla p\|_K^2 \\ &= \tilde{c}h^2(\|\nabla^2 v\|^2 + \|\nabla p\|^2). \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen auf beiden Seiten ergibt sich das gewünschte Ergebnis.

$$\|(v - \pi_h v, p - \pi_h p)\| \leq ch \sqrt{\|\nabla^2 v\|^2 + \|\nabla p\|^2} \leq ch(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|)$$

□

Lemma 10

Unter den Voraussetzungen des Satzes 5 gilt die Abschätzung

$$|A_h((v - v_h, p - p_h); (\phi_h, \xi_h))| \leq \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\!(\phi_h, \xi_h)\!\|$$

für alle $\{\phi_h, \xi_h\} \in V_h \times Q_h$.

Beweis. Mit Hilfe der modifizierten und ursprünglichen Stokes-Gleichungen ergibt sich unter Ausnutzung der Linearität des Skalarproduktes

$$\begin{aligned}
|A_h((v - v_h, p - p_h); (\phi_h, \xi_h))| &= (\nabla(v - v_h), \nabla\phi_h) - (p - p_h, \nabla \cdot \phi_h) \\
&\quad + (\nabla \cdot (v - v_h), \xi_h) + S_h(p - p_h, \xi_h) \\
&= (f, \phi_h) - (f, \phi_h) - S_h(p_h, \xi_h) + S_h(p - p_h, \xi_h) \\
&\leq S_h(p, \xi_h).
\end{aligned}$$

Mit der Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung im Inneren und anschließend auf das Euklidische Skalarprodukt ergibt sich die Aussage des Lemmas

$$\begin{aligned}
S_h(p, \xi_h) &= \sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 (\nabla p, \nabla \xi_h)_K \\
&\leq \sum_{K \in \Omega_h} h_K \|\nabla p\|_K h_K \|\nabla \xi_h\|_K \\
&\leq \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla \xi_h\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|(\phi_h, \xi_h)\|.
\end{aligned}$$

□

Beweis der a priori Abschätzung für Geschwindigkeit und Druck

Nach Lemma 7 reicht es die a priori Abschätzung für die Tripelnorm zu zeigen. Im Folgenden seien beide Interpolierenden von v und p mit $\pi_h \cdot$ bezeichnet. Durch Einschieben der Interpolierenden in den Term $\| (v - v_h, p - p_h) \|$ und Anwendung der Dreiecksungleichung erhalten wir zwei Summanden. Für $\| (v - \pi_h v, p - \pi_h p) \|$ haben wir die Abschätzung bereits in Lemma 9 gezeigt. Auf den anderen Summanden wenden wir Lemma 8 an und erhalten

$$\begin{aligned}
\|(\pi_h v - v_h, \pi_h p - p_h)\| &\leq \gamma^{-1} \sup_{(\phi_h, \xi_h) \in V_h \times Q_h} \frac{A_h((\pi_h v - v_h, \pi_h p - p_h); (\phi_h, \xi_h))}{\|(\phi_h, \xi_h)\|} \\
&\leq \gamma^{-1} \sup_{(\phi_h, \xi_h) \in V_h \times Q_h} \frac{A_h((v - v_h, p - p_h); (\phi_h, \xi_h))}{\|(\phi_h, \xi_h)\|} \tag{2.9a}
\end{aligned}$$

$$+ \gamma^{-1} \sup_{(\phi_h, \xi_h) \in V_h \times Q_h} \frac{A_h((\pi_h v - v, \pi_h p - p); (\phi_h, \xi_h))}{\|(\phi_h, \xi_h)\|} \tag{2.9b}$$

Lemma 10 liefert angewandt auf den Summanden (2.9a)

$$\begin{aligned} \frac{A_h((v - v_h, p - p_h); (\phi_h, \xi_h))}{\|(\phi_h, \xi_h)\|} &= \frac{(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p\|_K^2)^{\frac{1}{2}} \|(\phi_h, \xi_h)\|}{\|(\phi_h, \xi_h)\|} \\ &= \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq h \|\nabla p\|, \end{aligned}$$

sodass wir für diesen Term bereits die Abschätzung hergeleitet haben. Weiter gilt nach Definition von $A_h(\cdot)$

$$\begin{aligned} A_h((\pi_h v - v, \pi_h p - p); (\phi_h, \xi_h)) &= (\nabla(\pi_h v - v), \nabla \phi_h) - (\pi_h p - p, \nabla \cdot \phi_h) \\ &\quad + (\nabla \cdot (\pi_h v - v), \xi_h) + S_h(\pi_h p - p, \xi_h). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Im Folgenden betrachten wir wieder jeden dieser Summanden einzeln. Für die ersten beiden Terme können wir direkt die a priori Abschätzung unter Verwendung der Interpolationsabschätzungen herleiten:

$$\begin{aligned} |(\nabla(\pi_h v - v), \nabla \phi_h)| &\leq \|\nabla(\pi_h v - v)\| \|\nabla \phi_h\| \leq ch \|\nabla^2 v\| \|(\phi_h, \xi_h)\|, \\ |(\pi_h p - p, \nabla \cdot \phi_h)| &\leq \|\pi_h p - p\| \tilde{c} \|\nabla \phi_h\| \leq ch \|\nabla p\| \|(\phi_h, \xi_h)\|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Für den Term der Divergenzfreiheit wird über alle Zellen summiert und partiell integriert. Die Normalenableitungen haben entgegengesetzte Richtungen und heben sich gegenseitig auf. Die Randterme entfallen bedingt durch die homogenen Dirichlet-Randwerte. Anschließend liefert die Cauchy-Schwarz-Ungleichung das gewünschte Ergebnis.

$$\begin{aligned} |(\nabla \cdot (\pi_h v - v), \xi_h)| &= \sum_{K \in \Omega_h} |(\nabla \cdot (\pi_h v - v), \xi_h)_K| \\ &= \sum_{K \in \Omega_h} |(\pi_h v - v, \nabla \xi_h)_K| \\ &\leq \sum_{K \in \Omega_h} \|\pi_h v - v\| \|\nabla \xi_h\| \\ &\leq c \sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla^2 v\| \|\nabla \xi_h\| \\ &= c \sum_{K \in \Omega_h} h_K \|\nabla^2 v\| h_K \|\nabla \xi_h\| \\ &\leq c \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla^2 v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla \xi_h\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq ch \|\nabla^2 v\| \|(\phi_h, \xi_h)\|. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Der vierte Summand in (2.10) liefert unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

den Beitrag

$$\begin{aligned}
S_h(\pi_h p - p, \xi_h) &\leq \sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla(\pi_h p - p)\| \|\nabla \xi_h\| \\
&\leq c \sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p\| \|\nabla \xi_h\| \\
&= c \sum_{K \in \Omega_h} h_K \|\nabla p\| h_K \|\nabla \xi_h\| \\
&\leq c \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla \xi_h\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq ch \|\nabla p\| \|\phi_h, \xi_h\|. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Mit den Abschätzungen (2.11), (2.12) und (2.13) lässt sich somit auch der zweite Term von (2.9) geeignet abschätzen. Zusammengesetzt ergibt sich damit

$$\|(v - v_h, p - p_h)\| \leq \gamma^{-1} ch (\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|). \tag{2.14}$$

Unter Verwendung von Lemma 7 ist damit die a priori Abschätzung gezeigt. \square

2.3.2 Beweis des L^2 -Fehlers der Geschwindigkeit

Zu zeigen ist die zweite a priori Abschätzung von Satz 5 für $v \in V \cap H^2(\Omega)$ und $p \in Q \cap H^1(\Omega)$:

$$\|v - v_h\| \leq ch^2 (\|\nabla^2 v\| + \|p\|).$$

Lemma 11 (Abschätzungen)

Dieses Lemma dient zur Vorbereitung aller benötigten Abschätzungen im Beweis des L^2 -Fehlers. Es seien die Voraussetzungen wie in Satz 5 gegeben und v_g habe die gleiche Regularität wie v , sowie p_g die gleiche Regularität wie p . Diese Funktionen beziehen sich auf die in der nachfolgenden Gleichung (2.15) auftretenden Funktionen.

- i) $\|\nabla(v - v_h)\| \leq ch(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|)$
- ii) $\|p - p_h\| \leq ch(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|)$
- iii) $\|\nabla(v_g - \pi_h v_g)\| \leq ch\|\nabla^2 v_g\|$
- iv) $\|\nabla \cdot (v_g - \pi_h v_g)\| \leq ch\|\nabla^2 v_g\|$
- v) $\|p_g - \pi_h p_g\| \leq ch\|\nabla p_g\|$

Beweis. Die Abschätzungen i) und ii) folgen direkt aus der Anwendung der ersten Ungleichung von Satz 5, die soeben bewiesen wurde.

Es ergeben sich iii) bis v) als übliche Interpolationsabschätzungen für $v_g \in H^2(\Omega)^d$ und $p_g \in H^1(\Omega)$ siehe [9, S. 110]. \square

Beweis des L^2 -Fehlers der Geschwindigkeit

Nach [13, S. 53] existiert für jede rechte Seite $g \in L^2(\Omega)^d$ (genau) eine Lösung $\{v_g, p_g\} \in (V \cap H^2(\Omega)^d) \times (Q \cap H^1(\Omega))$ des Stokes-Problems ohne Modifizierung

$$\begin{aligned} (\nabla v_g, \nabla \phi) - (p_g, \nabla \cdot \phi) &= (g, \phi) \quad \forall \phi \in V \\ (\nabla \cdot v_g, \xi) &= 0 \quad \forall \xi \in Q \end{aligned} \quad (2.15)$$

für welche die Stabilitätsabschätzung

$$\|\nabla^2 v_g\| + \|\nabla p_g\| \leq c \|g\| \quad (2.16)$$

erfüllt ist.

Wir setzen $\phi := v - v_h \in V$ und $\xi := 0 \in Q$ in die Stokes-Gleichung ein und fügen anschließend $\pm \phi_h$ sowie $\pm \xi_h$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} (g, v - v_h) &= (\nabla v_g, \nabla(v - v_h)) - (p_g, \nabla \cdot (v - v_h)) \\ &= (\nabla(v_g - \phi_h), \nabla(v - v_h)) + (\nabla \phi_h, \nabla(v - v_h)) \\ &\quad - (p_g - \xi_h, \nabla \cdot (v - v_h)) - (\xi_h, \nabla \cdot (v - v_h)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Wir verwenden nun die Stokes-Gleichungen (1.1a) und formen den zweiten Summanden von (2.17) um. Mit Hilfe der Divergenzfreiheit für v_g ergibt sich dann

$$\begin{aligned} (\nabla(v - v_h), \nabla \phi_h) &= (p - p_h, \nabla \cdot \phi_h) \\ &= -(p - p_h, \nabla \cdot (v_g - \phi_h)). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Im vierten Summanden von (2.17) verwenden wir die modifizierte Stokes-Gleichung (2.3b) und erhalten, da v die ursprünglichen Stokes-Gleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot (v - v_h), \xi_h) &= S_h(p_h, \xi_h) \\ &= S_h(p, \xi_h) - S_h(p - p_h, \xi_h). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Durch Einsetzen von (2.18) und (2.19) in die ursprüngliche Gleichung (2.17) ergibt sich ein Zwischenergebnis, von dem wir nachfolgend jeden Term einzeln betrachten.

$$\begin{aligned} (g, v - v_h) &= (\nabla(v - v_h), \nabla(v_g - \phi_h)) - (p - p_h, \nabla \cdot (v_g - \phi_h)) \\ &\quad - (\nabla \cdot (v - v_h), p_g - \xi_h) + S_h(p, \xi_h) - S_h(p - p_h, \xi_h) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Wir setzen nun $\phi_h := \pi_h v_g$ und $\xi_h := \pi_h p_g$, behalten jedoch die Bezeichnung mit ϕ_h und ξ_h bei. Mit den Abschätzungen aus Lemma 11 und Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt für die ersten drei Summanden

$$\begin{aligned} |(\nabla(v - v_h), \nabla(v_g - \phi_h))| &\leq c \|\nabla(v - v_h)\| \cdot h \|\nabla^2 v_g\| \\ &\leq ch^2 (\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|) \|\nabla^2 v_g\| \\ |(p - p_h, \nabla \cdot (v_g - \phi_h))| &\leq ch \|p - p_h\| \cdot h \|\nabla^2 v_g\| \\ &\leq ch^2 (\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|) \|\nabla^2 v_g\| \\ |(\nabla \cdot (v - v_h), p_g - \xi_h)| &\leq c \|\nabla(v - v_h)\| \cdot h \|\nabla p_g\| \\ &\leq ch^2 (\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|) \|\nabla p_g\|. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Für den Modifizierungsterm $S_h(p - p_h, \xi_h)$ wird die Cauchy-Schwarz-Ungleichung im Inneren auf $(p - p_h, \xi_h)_K$ und anschließend auf das Euklidische Skalarprodukt angewandt. Anschließend benötigen wir erneut Lemma 11, sowie Lemma 7 (bzw. die Abschätzung der Tripelnorm (2.14)) für die Abschätzung der Tripelnorm

$$\begin{aligned}
|S_h(p - p_h, \xi_h)| &\leq (S_h(p - p_h, p - p_h))^{\frac{1}{2}} (S_h(\xi_h, \xi_h))^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|(v - v_h, p - p_h)\| (S_h(\xi_h, \xi_h))^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|(v - v_h, p - p_h)\| ch \|\nabla p_g\| \\
&\leq ch^2(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|) \|\nabla p_g\|. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Für den zweiten Modifizierungsterm folgt bei analogem Vorgehen, jedoch ohne Verwendung der Tripelnorm,

$$\begin{aligned}
|S_h(p, \xi_h)| &\leq (S_h(p, p))^{\frac{1}{2}} (S_h(\xi_h, \xi_h))^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (h^2 \|\nabla p\|^2)^{\frac{1}{2}} ch \|p_g\| \\
&\leq ch^2(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|) \|\nabla p_g\|. \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Fassen wir alle Ergebnisse (2.21), (2.22) und (2.23) in Gleichung (2.20) zusammen und verwenden die trivialen Abschätzungen $\|\nabla p_g\| \leq \|\nabla^2 v_g\| + \|\nabla p_g\|$ sowie $\|\nabla^2 v_g\| \leq \|\nabla^2 v_g\| + \|\nabla p_g\|$ erschließt sich

$$\begin{aligned}
(g, v - v_h) &\leq \tilde{c} h^2 (\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|) (\|\nabla^2 v_g\| + \|\nabla p_g\|) \\
&\leq C h^2 (\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|) \|g\|.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde im zweiten Schritt die Stabilitätsabschätzung (2.16) für $\{v_g, p_g\}$ verwendet. Mit der Definition des L^2 -Fehlers und da $g \in L^2(\Omega)$ beliebig gewählt werden kann, folgt die a priori Abschätzung

$$\|v - v_h\| = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{|(g, v - v_h)|}{\|g\|} \leq ch^2 (\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|).$$

□

Bemerkung: Im letzten Schritt kann man auch $g := (v - v_h) \in L^2(\Omega)$ setzen. Dies ist ein äquivalenter Beweisansatz, der auf eine bekannte Methode, den Aubin-Nitsche-Trick, führt. Hierfür muss man am Anfang das duale Problem formulieren und dies weiter umformen.

3 Konsistente Stabilisierungsmethode

Es gibt eine ganze Reihe weiterer Stabilisierungsmethoden, die ihre Vor- und Nachteile haben. So hat die Druckstabilisierung den Vorteil, dass sie einfach zu berechnen ist, jedoch den Nachteil nur mit Ordnung 1 zu konvergieren (siehe dazu Kapitel 5 auf Seite 25). Wir wollen nun eine weitere Methode diskutieren, mit der wir höhere Ordnung erreichen können. Jedoch wird dies auch den Nachteil von höherer Rechenzeit haben. Ausgangspunkt ist das Stokes-Problem in starker Formulierung.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt. Gesucht ist das Vektorfeld $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Geschwindigkeit und die skalare Druckfunktion $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ als Lösung der Stokes-Gleichung im klassischen Sinne:

$$-\nu \Delta v + \nabla p = f, \quad \text{in } \Omega \quad (3.1a)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad \text{in } \Omega \quad (3.1b)$$

$$v|_{\partial\Omega} = g.$$

Dabei beschreibt ν die Viskosität des Fluids.

Wir betrachten wieder einen Finite-Elemente-Ansatz und suchen eine Lösung $v_h \in V_h \subset V = H_0^1(\Omega)$ und $p_h \in Q_h \subset Q = L_0^2(\Omega)$. Man beachte, dass auch mit inhomogenen Dirichletträndern auf dem Raum $H_0^1(\Omega)$ argumentiert werden kann, siehe [9, S.20]. Durch Testen von Gleichung (3.1a) mit $\phi_h \in V_h$ und Gleichung (3.1b) mit $\xi_h \in Q_h$ erhält man die Stokes-Gleichungen in variationeller Formulierung (1.1). Stattdessen testen wir Gleichung (3.1a) mit $\phi_h + \alpha h^2 \nabla \xi_h$ und Gleichung (3.1b) mit ξ_h . Dabei ist α ein wählbarer Stabilisierungsparameter. Es folgt direkt für alle $\phi_h \in V_h$ und $\xi_h \in Q_h$:

$$0 = (-\nu \Delta v_h + \nabla p_h - f, \phi_h + \alpha h^2 \nabla \xi_h) + (\nabla \cdot v_h, \xi_h).$$

Nutzen wir die Linearität des Skalarproduktes und integrieren partiell ergibt sich

$$\begin{aligned} (f, \phi_h) &= (\nu \nabla v_h, \nabla \phi_h) - (p_h, \nabla \cdot \phi_h) \\ &\quad + \alpha h^2 (-\nu \Delta v_h + \nabla p_h - f, \nabla \xi_h) \\ &\quad + (\nabla \cdot v_h, \xi_h). \end{aligned}$$

Wenn wir diese variationelle Formulierung wieder in ein System mit zwei Gleichungen umschreiben, ergibt sich die Ähnlichkeit zur Druckstabilisierung (2.3):

$$(\nu \nabla v_h, \nabla \phi_h) - (p_h, \nabla \cdot \phi_h) = (f, \phi_h) \quad \forall \phi_h \in V_h \quad (3.2a)$$

$$(\nabla \cdot v_h, \xi_h) + \alpha h^2 (-\nu \Delta v_h + \nabla p_h - f, \nabla \xi_h) = 0 \quad \forall \xi_h \in Q_h \quad (3.2b)$$

Die Wahl der Testfunktion $\phi_h + \alpha h^2 \nabla \xi_h$ wird motiviert durch [7]. Dort wurde im Wesentlichen mit $\phi_h + \frac{1}{2} \alpha h^2 (-\nu \Delta \phi_h + \nabla \xi_h)$ getestet und ein gutes Resultat für die a priori Abschätzung hergeleitet. In unserem Fall werden wir Vermutungen aufstellen, die im Zuge dieser Arbeit anhand numerischer Ergebnisse gerechtfertigt werden.

Hypothese 12 (Existenz und Eindeutigkeit der konsistenten stabilisierten Stokes-Gleichung)

Für die konsistent stabilisierte Stokes-Gleichung (3.2) existiert eine eindeutige Lösung $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$ und diese ist im folgenden Sinne stabil:

$$\|\nabla v_h\| + \|p_h\| + h^2 \|\Delta v_h + \nabla p_h\| \leq c \|f\|.$$

Diese Aussage entspricht Satz 4. Ein weiteres Resultat neben der Wohlgestelltheit des Problems sind a priori Abschätzungen für die diskrete Lösung des Problems.

Hypothese 13 (A priori Abschätzung für die konsistent stabilisierte Stokes-Gleichung)

Für die Lösung $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$ der konsistent stabilisierten Stokes-Gleichung (3.2) gilt, sofern v und p hinreichend regulär sind, die a priori Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| &\leq ch^r \{c(v) + c(p)\}, \\ \|v - v_h\| &\leq ch^{r+1} \{c(v) + c(p)\}, \end{aligned}$$

wobei r der Grad des equal-order Ansatzes ist.

Diese Hypothese ist die Aussage von Satz 2 angepasst an *equal-order Ansätze*. Der entsprechende Satz 5 für die druckstabilisierte Stokes-Gleichung lieferte nur $\mathcal{O}(h^1)$ für die Energienorm der Geschwindigkeit und L^2 -Norm des Druckes, bzw. $\mathcal{O}(h^2)$ in der Abschätzung der L^2 -Norm der Geschwindigkeit.

4 Numerische Realisierung

Bisher haben wir uns mit der Theorie für die Stokes-Gleichung beschäftigt. Jedoch gibt es oft Resultate, die in der Theorie sehr gut sind, und numerisch nicht beobachtet werden können. Um die gezeigten Resultate zu überprüfen betrachten wir im Folgenden ein „einfaches“ Modellproblem, das die Stokes-Gleichungen in starker Formulierung (3.1) löst.

4.1 Das Modellproblem

Um Ungenauigkeiten in Fehlerschätzern, bei unbekannter exakter Lösung, durch Referenzlösungen auf feinen Gittern zu umgehen, betrachten wir ein Modellproblem mit bekannter exakter Lösung.

4.1.1 Herleitung

Das Modell ist auf dem Gebiet $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ formuliert. Auch hier verwenden wir wieder die Vereinfachung in der Viskosität $\nu = 1$. Ausgehend vom Ansatz

$$v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v(x, y) = \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ -\cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{pmatrix}$$

für das Geschwindigkeitsfeld wird nun ein passender Druck p und eine rechte Seite f bestimmt. Das Geschwindigkeitsfeld erfüllt die Divergenzfreiheit, denn es gilt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v(x, y) &= \partial_x v_1(x, y) + \partial_y v_2(x, y) \\ &= \pi \cos(\pi x) \cos(\pi y) - \pi \cos(\pi x) \cos(\pi y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Weiter gilt für die zweiten Ableitungen $\Delta v(x, y) = -2\pi^2 v(x, y)$. Unter der Forderung $f_1 \equiv 0$ folgt mit den Stokes-Gleichungen (3.1)

$$\begin{aligned} \partial_x p(x, y) &= -2\pi^2 v_1(x, y) \\ &= -2\pi^2 \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ \Rightarrow p(x, y) &= 2\pi \cos(\pi x) \cos(\pi y) + c, \end{aligned}$$

mit einer Funktion c abhängig von y . Setzen wir $c \equiv 0$ ergibt sich die rechte Seite f durch

$$\begin{aligned}\nabla p &= \begin{pmatrix} -2\pi^2 v_1(x, y) \\ 2\pi^2 v_2(x, y) \end{pmatrix} = 2\pi^2 \begin{pmatrix} -v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{pmatrix} \\ f &= -\Delta v + \nabla p = 4\pi^2 \begin{pmatrix} 0 \\ v_2(x, y) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Es bleibt die Mittelwerteigenschaft des Druckes zu überprüfen. Diese ergibt sich durch

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} p(x, y) d(x, y) &= 2\pi \int_0^1 \int_0^1 \cos(\pi x) \cos(\pi y) dx dy \\ &= 0,\end{aligned}$$

denn die Funktion $\cos(\pi \cdot)$ ist punktsymmetrisch um $\frac{1}{2}$.

4.1.2 Notation und ausformulierte Problemstellung

Das zu lösende Problem lautet nun: Suche ein Geschwindigkeitsfeld $v \in V = H_0^1(\Omega)^2$ und einen Druck $p \in Q = L_0^2(\Omega)$, sodass die Stokes-Gleichung (nun in variationeller Formulierung)

$$(\nabla v, \nabla \phi) - (p, \nabla \cdot \phi) = (f, \phi) \quad \forall \phi \in V, \quad (4.1a)$$

$$(\nabla \cdot v, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in Q, \quad (4.1b)$$

mit Dirichlet-Randdaten

$$v|_{\partial\Omega} = \bar{v}|_{\partial\Omega} \quad (4.2)$$

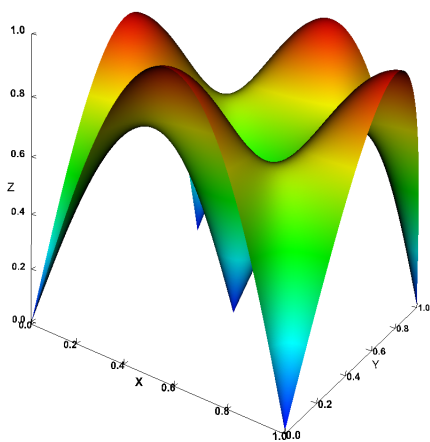
im Gebiet $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ und rechter Seite $f = (0, -4\pi^2 \cos(\pi x) \sin(\pi y))^T$ erfüllt ist. Die eindeutige Lösung dieses Problems ist nach Abschnitt 4.1.1 auf Seite 21 gegeben durch

$$\bar{v}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ -\cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{pmatrix}, \quad (4.3a)$$

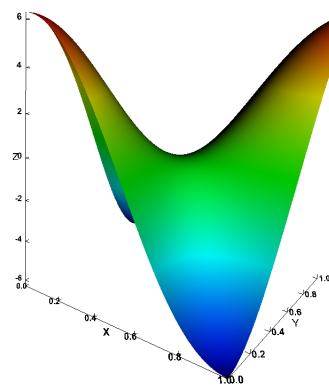
$$\bar{p}(x, y) = 2\pi \cos(\pi x) \cos(\pi y). \quad (4.3b)$$

Die Abbildung 4.1 visualisiert die Lösung \bar{v} und \bar{p} .

Im nächsten Kapitel beschäftigen wir uns mit den Ergebnissen der numerischen Berechnungen. Wie zuvor setzen wir die Viskosität $\nu = 1$ und, sofern wir eine Stabilisierung verwenden, den Parameter $\alpha = 0.1$. Die Programme wurden mit Hilfe von deal.II [1] geschrieben und zum Lösen des Gleichungssystems wird ein direkter Löser von UMFPAK verwendet. Die Vergleichsgeraden für die Ordnung in den Grafiken sind auf allen Abbildungen identisch und können zum visuellen Vergleich genutzt werden.



(a) Das Geschwindigkeitsfeld v .



(b) Der Druck p .

Abbildung 4.1: Visualisierung der berechneten Lösung des Modellproblems (siehe Abschnitt 4.1.2) mit Q^2 - Q^1 Ansatzräumen ohne Stabilisierung. Das Gitter bestand aus 262144 Zellen. Die Norm der Geschwindigkeit und der Betrag des Druckes sind dabei im Farbschema sowie in der z -Achse dargestellt.

5 Numerische Ergebnisse

5.1 Q^1 - Q^1 finite Elemente

5.1.1 Konvergenztabellen

Tabelle 5.1: Ohne Stabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	243	1.671e-02	-	3.573e-01	-	7.036e+03	-	0.01
256	867	4.164e-03	2.00	1.782e-01	1.00	1.035e+05	-3.88	0.02
1024	3267	1.040e-03	2.00	8.905e-02	1.00	8.035e+03	3.69	0.13
4096	12675	2.600e-04	2.00	4.452e-02	1.00	1.011e+05	-3.65	0.92
16384	49923	6.499e-05	2.00	2.226e-02	1.00	1.744e+04	2.54	6.13
65536	198147	1.040e+00	-13.97	7.317e+02	-15.00	2.097e+04	-0.27	57.35

Tabelle 5.2: Mit Druckstabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	243	4.406e-02	-	4.678e-01	-	5.904e-01	-	0.03
256	867	1.232e-02	1.84	1.979e-01	1.24	1.667e-01	1.82	0.05
1024	3267	3.175e-03	1.96	9.183e-02	1.11	4.349e-02	1.94	0.19
4096	12675	7.998e-04	1.99	4.488e-02	1.03	1.103e-02	1.98	1.01
16384	49923	2.004e-04	2.00	2.230e-02	1.01	2.772e-03	1.99	6.50
65536	198147	5.011e-05	2.00	1.114e-02	1.00	6.941e-04	2.00	43.61
262144	789507	1.253e-05	2.00	5.565e-03	1.00	1.736e-04	2.00	323.0
1048576	3151875	3.133e-06	2.00	2.782e-03	1.00	4.341e-05	2.00	2313

Tabelle 5.3: Mit konsistenter Stabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	243	1.658e-02	-	3.573e-01	-	2.739e-02	-	0.05
256	867	4.155e-03	2.00	1.782e-01	1.00	6.610e-03	2.05	0.11
1024	3267	1.039e-03	2.00	8.905e-02	1.00	1.650e-03	2.00	0.50
4096	12675	2.599e-04	2.00	4.452e-02	1.00	4.126e-04	2.00	2.16
16384	49923	6.499e-05	2.00	2.226e-02	1.00	1.032e-04	2.00	11.10
65536	198147	1.625e-05	2.00	1.113e-02	1.00	2.579e-05	2.00	62.08

Tabelle 5.4: Mit Druckstabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.01h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	243	4.419e-02	-	4.685e-01	-	5.925e-01	-	0.03
256	867	1.240e-02	1.83	1.983e-01	1.24	1.679e-01	1.82	0.04
1024	3267	3.200e-03	1.95	9.193e-02	1.11	4.391e-02	1.93	0.20
4096	12675	8.074e-04	1.99	4.492e-02	1.03	1.116e-02	1.98	1.01
16384	49923	2.024e-04	2.00	2.232e-02	1.01	2.812e-03	1.99	6.47
65536	198147	5.067e-05	2.00	1.114e-02	1.00	7.095e-04	1.99	43.93

Tabelle 5.5: Mit Druckstabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.1h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	243	4.563e-02	-	4.782e-01	-	6.141e-01	-	0.03
256	867	1.326e-02	1.78	2.048e-01	1.22	1.811e-01	1.76	0.05
1024	3267	3.509e-03	1.92	9.546e-02	1.10	4.907e-02	1.88	0.18
4096	12675	9.000e-04	1.96	4.690e-02	1.03	1.308e-02	1.91	0.99
16384	49923	2.285e-04	1.98	2.345e-02	1.00	3.665e-03	1.84	6.40
65536	198147	5.777e-05	1.98	1.177e-02	0.99	1.210e-03	1.60	43.25

Tabelle 5.6: Mit Druckstabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.2h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	243	4.774e-02	-	4.952e-01	-	6.447e-01	-	0.01
256	867	1.459e-02	1.71	2.190e-01	1.18	2.007e-01	1.68	0.05
1024	3267	4.006e-03	1.87	1.043e-01	1.07	5.733e-02	1.81	0.19
4096	12675	1.055e-03	1.92	5.220e-02	1.00	1.639e-02	1.81	1.01
16384	49923	2.733e-04	1.95	2.651e-02	0.98	5.194e-03	1.66	6.49
65536	198147	7.030e-05	1.96	1.350e-02	0.97	2.026e-03	1.36	43.58

Tabelle 5.7: Mit konsistenter Stabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.01h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	243	1.659e-02	-	3.574e-01	-	2.741e-02	-	0.05
256	867	4.156e-03	2.00	1.783e-01	1.00	6.694e-03	2.03	0.12
1024	3267	1.040e-03	2.00	8.910e-02	1.00	1.771e-03	1.92	0.51
4096	12675	2.600e-04	2.00	4.455e-02	1.00	5.338e-04	1.73	2.25
16384	49923	6.503e-05	2.00	2.227e-02	1.00	1.972e-04	1.44	11.35
65536	198147	1.626e-05	2.00	1.114e-02	1.00	8.664e-05	1.19	63.08

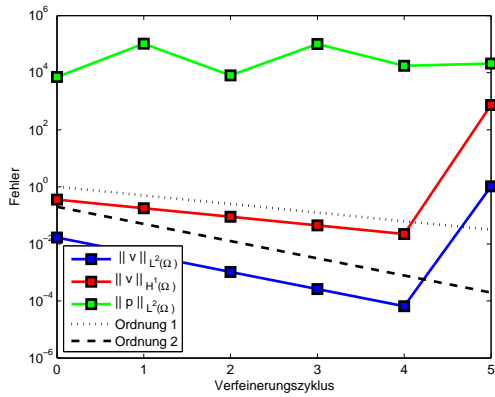
Tabelle 5.8: Mit konsistenter Stabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.1h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	243	1.690e-02	-	3.610e-01	-	3.344e-02	-	0.05
256	867	4.328e-03	1.96	1.824e-01	0.99	1.476e-02	1.18	0.12
1024	3267	1.111e-03	1.96	9.217e-02	0.98	7.941e-03	0.89	0.50
4096	12675	2.846e-04	1.97	4.649e-02	0.99	4.192e-03	0.92	2.23
16384	49923	7.279e-05	1.97	2.341e-02	0.99	2.130e-03	0.98	11.3
65536	198147	1.858e-05	1.97	1.178e-02	0.99	1.077e-03	0.98	63.05

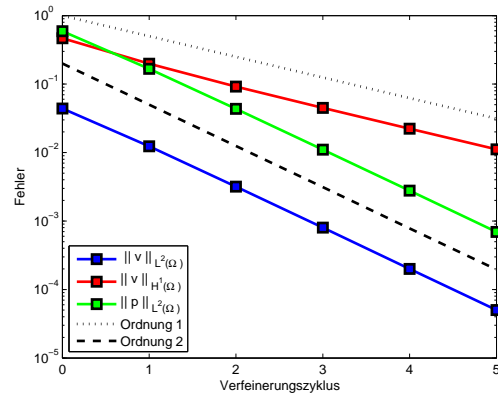
Tabelle 5.9: Mit konsistenter Stabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.2h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	243	1.776e-02	-	3.712e-01	-	4.969e-02	-	0.03
256	867	4.887e-03	1.86	1.939e-01	0.94	3.100e-02	0.68	0.11
1024	3267	1.355e-03	1.85	1.009e-01	0.94	1.899e-02	0.71	0.48
4096	12675	3.718e-04	1.87	5.208e-02	0.95	1.080e-02	0.81	2.21
16384	49923	1.014e-04	1.87	2.673e-02	0.96	5.860e-03	0.88	11.34
65536	198147	2.750e-05	1.88	1.367e-02	0.97	3.181e-03	0.88	62.85

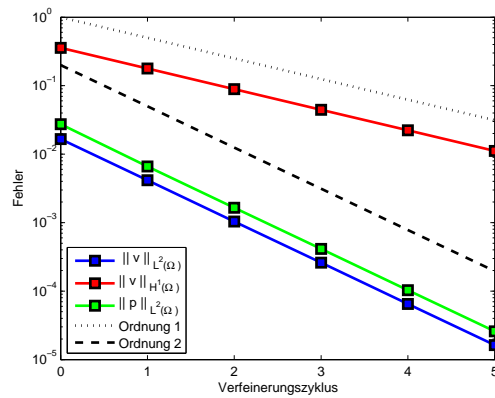
5.1.2 Grafiken



(a) Berechnung ohne zusätzliche Stabilisierung.

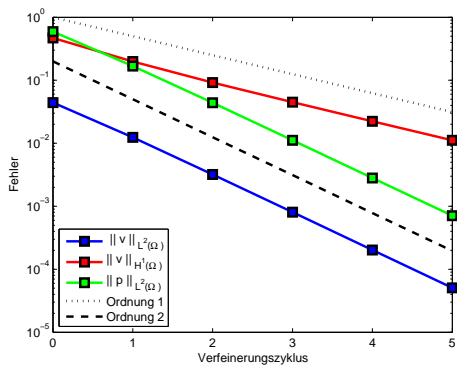


(b) Berechnung mit Druckstabilisierung.

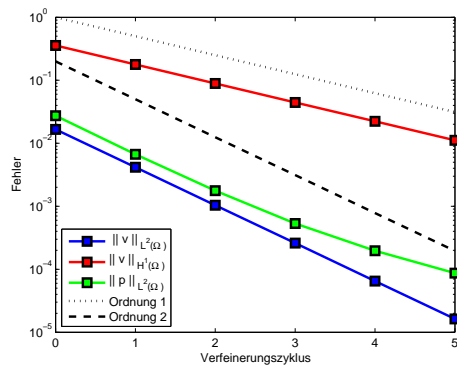


(c) Berechnung mit konsistenter Stabilisierung.

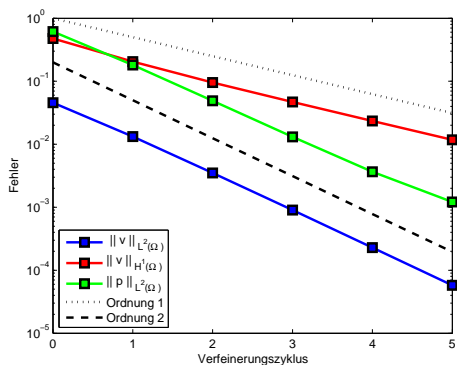
Abbildung 5.1: Visualisierung des Fehlers und der Konvergenzordnung bei Berechnung des Modellproblems aus Abschnitt 4.1 mit Q^1 - Q^1 finiten Elementen.



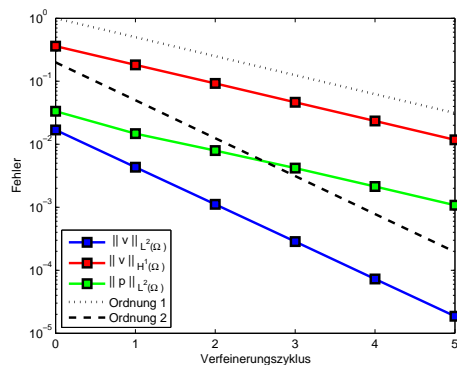
(a) Störung um $\delta = 0.01$.



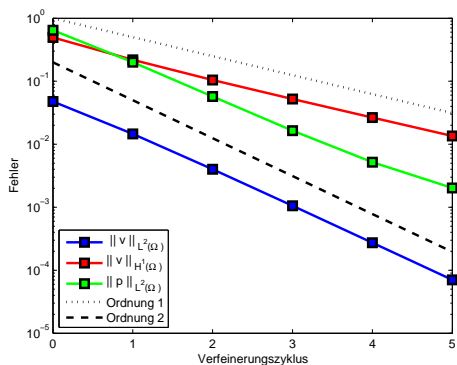
(b) Störung um $\delta = 0.01$.



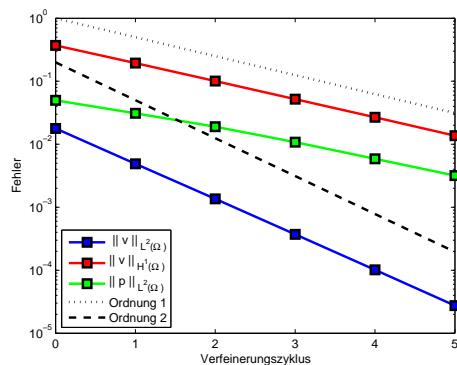
(c) Störung um $\delta = 0.1$.



(d) Störung um $\delta = 0.1$.



(e) Störung um $\delta = 0.2$.



(f) Störung um $\delta = 0.2$.

Abbildung 5.2: Visualisierung des Fehlers und der Konvergenzordnung bei Berechnung des Modellproblems aus Abschnitt 4.1 mit Q^1 - Q^1 finiten Elementen. Hierbei wurde eine Störung des Gitters um einen zufälligen Faktor kleiner als δh eingebaut. Für die Resultate in den Abbildungen (a), (c) und (e) wurde die Methode der Druckstabilisierung aus Abschnitt 2 auf Seite 7 zur Berechnung verwendet. Die Abbildungen (b), (d) und (f) beschreiben die konsistente Stabilisierungsmethode aus Abschnitt 3 auf Seite 19.

5.1.3 Auswertung

Ohne Stabilisierung kann man bei Q^1 - Q^1 finiten Elementen keine eindeutige Lösbarkeit garantieren, da die inf-sup-Bedingung nicht erfüllt ist. Die Systemmatrix ist dadurch irregulär. Dennoch erhalten wir eine Lösung, da durch Einfluss von Rundung Regularität gegeben ist. Die Ergebnisse sind allerdings nicht sehr aussagekräftig.

Druckstabilisierung liefert eine konvergente Lösung. Die Konvergenzordnung in der H^1 -Halbnorm und der L^2 -Norm der Geschwindigkeit ist wie erwartet $\mathcal{O}(h^1)$ bzw. $\mathcal{O}(h^2)$. Im Druck haben wir jedoch Konvergenz mit $\mathcal{O}(h^2)$ statt $\mathcal{O}(h^1)$.

Konsistente Stabilisierung konvergiert mit Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ in der L^2 -Norm der Geschwindigkeit und mit $\mathcal{O}(h^1)$ in der H^1 -Halbnorm der Geschwindigkeit. Im Druck besitzt auch diese Stabilisierung Superkonvergenz von $\mathcal{O}(h^2)$ statt $\mathcal{O}(h^1)$.

Gitterstörung verringert die Superkonvergenz im Druck, wie man an den Grafiken gut erkennen kann. Dabei wird die konsistente Stabilisierung stärker von der Störung beeinflusst, und fällt sogar unter die erwartete Ordnung $\mathcal{O}(h^1)$. Dieser Effekt ist noch genauer zu untersuchen.

5.2 Q^2 - Q^2 finite Elemente

5.2.1 Konvergenztabellen

Tabelle 5.10: Ohne Stabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	867	9.422e-04	-	5.541e-02	-	2.215e+03	-	0.05
256	3267	2.202e-04	2.10	2.571e-02	1.11	1.925e+03	0.20	0.16
1024	12675	5.388e-05	2.03	1.254e-02	1.04	1.204e+03	0.68	0.87
4096	49923	1.337e-05	2.01	6.213e-03	1.01	3.200e+02	1.91	7.72
16384	198147	3.334e-06	2.00	3.096e-03	1.01	2.789e+03	-3.12	67.49
65536	789507	8.326e-07	2.00	1.545e-03	1.00	2.980e+03	-0.10	526.4

Tabelle 5.11: Mit Druckstabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	867	4.015e-02	-	2.936e-01	-	5.491e-01	-	0.06
256	3267	1.152e-02	1.80	8.533e-02	1.78	1.625e-01	1.76	0.27
1024	12675	2.994e-03	1.94	2.238e-02	1.93	4.310e-02	1.91	1.18
4096	49923	7.561e-04	1.99	5.678e-03	1.98	1.100e-02	1.97	5.54
16384	198147	1.895e-04	2.00	1.426e-03	1.99	2.768e-03	1.99	28.79
65536	789507	4.741e-05	2.00	3.569e-04	2.00	6.934e-04	2.00	200.6

Tabelle 5.12: Mit konsistenter Stabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	867	3.746e-04	-	1.835e-02	-	1.235e-02	-	0.24
256	3267	4.445e-05	3.07	4.532e-03	2.02	2.961e-03	2.06	0.92
1024	12675	5.472e-06	3.02	1.130e-03	2.00	7.335e-04	2.01	3.71
4096	49923	6.811e-07	3.01	2.822e-04	2.00	1.830e-04	2.00	15.8
16384	198147	8.505e-08	3.00	7.053e-05	2.00	4.572e-05	2.00	69.91
65536	789507	1.063e-08	3.00	1.763e-05	2.00	1.143e-05	2.00	365.0
262144	3151875	1.328e-09	3.00	4.408e-06	2.00	2.857e-06	2.00	2326

Tabelle 5.13: Mit Druckstabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.01h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	867	4.029e-02	-	2.946e-01	-	5.510e-01	-	0.09
256	3267	1.160e-02	1.80	8.593e-02	1.78	1.636e-01	1.75	0.28
1024	12675	3.021e-03	1.94	2.260e-02	1.93	4.352e-02	1.91	1.16
4096	49923	7.639e-04	1.98	5.745e-03	1.98	1.112e-02	1.97	5.55
16384	198147	1.917e-04	1.99	1.449e-03	1.99	2.805e-03	1.99	28.92
65536	789507	4.798e-05	2.00	3.680e-04	1.98	7.060e-04	1.99	202.4

Tabelle 5.14: Mit Druckstabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.1h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	867	4.174e-02	-	3.054e-01	-	5.712e-01	-	0.08
256	3267	1.246e-02	1.74	9.266e-02	1.72	1.762e-01	1.70	0.26
1024	12675	3.328e-03	1.90	2.534e-02	1.87	4.840e-02	1.86	1.18
4096	49923	8.560e-04	1.96	6.915e-03	1.87	1.281e-02	1.92	5.61
16384	198147	2.175e-04	1.98	2.090e-03	1.73	3.470e-03	1.88	29.42
65536	789507	5.503e-05	1.98	7.888e-04	1.41	1.062e-03	1.71	207.2

Tabelle 5.15: Mit Druckstabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.2h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	867	4.374e-02	-	3.203e-01	-	5.988e-01	-	0.07
256	3267	1.372e-02	1.67	1.027e-01	1.64	1.947e-01	1.62	0.28
1024	12675	3.801e-03	1.85	2.987e-02	1.78	5.606e-02	1.80	1.23
4096	49923	1.004e-03	1.92	9.023e-03	1.73	1.567e-02	1.84	5.88
16384	198147	2.602e-04	1.95	3.229e-03	1.48	4.676e-03	1.74	30.56
65536	789507	6.692e-05	1.96	1.428e-03	1.18	1.687e-03	1.47	201.9

Tabelle 5.16: Mit konsistenter Stabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.01h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	867	3.750e-04	-	1.835e-02	-	1.236e-02	-	0.24
256	3267	4.452e-05	3.07	4.533e-03	2.02	2.966e-03	2.06	0.92
1024	12675	5.482e-06	3.02	1.130e-03	2.00	7.351e-04	2.01	3.77
4096	49923	6.826e-07	3.01	2.824e-04	2.00	1.834e-04	2.00	16.08
16384	198147	8.526e-08	3.00	7.061e-05	2.00	4.585e-05	2.00	70.83
65536	789507	1.066e-08	3.00	1.765e-05	2.00	1.146e-05	2.00	369.0

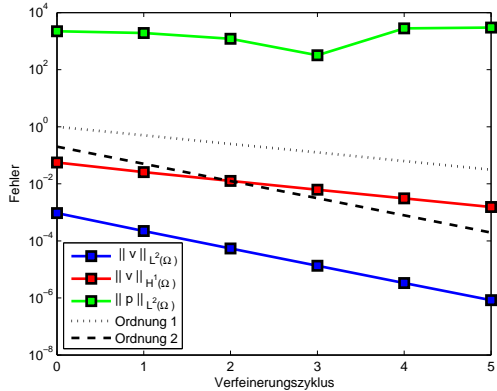
Tabelle 5.17: Mit konsistenter Stabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.1h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	867	4.097e-04	-	1.897e-02	-	1.315e-02	-	0.24
256	3267	5.166e-05	2.99	4.815e-03	1.98	3.267e-03	2.01	0.96
1024	12675	6.627e-06	2.96	1.231e-03	1.97	8.288e-04	1.98	3.84
4096	49923	8.489e-07	2.96	3.146e-04	1.97	2.116e-04	1.97	16.37
16384	198147	1.086e-07	2.97	8.004e-05	1.97	5.382e-05	1.98	72.27
65536	789507	1.389e-08	2.97	2.034e-05	1.98	1.368e-05	1.98	381.2

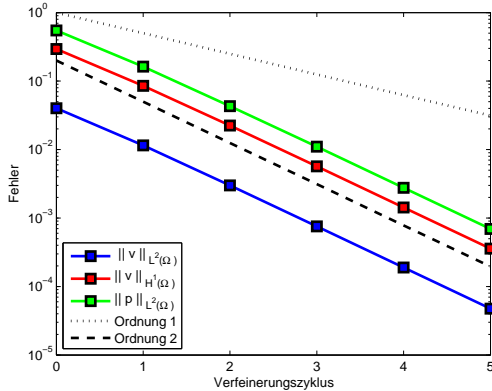
Tabelle 5.18: Mit konsistenter Stabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.2h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	867	5.082e-04	-	2.090e-02	-	1.538e-02	-	0.24
256	3267	7.296e-05	2.80	5.685e-03	1.88	4.124e-03	1.90	0.92
1024	12675	1.017e-05	2.84	1.544e-03	1.88	1.099e-03	1.91	3.82
4096	49923	1.390e-06	2.87	4.167e-04	1.89	2.953e-04	1.90	16.41
16384	198147	1.880e-07	2.89	1.105e-04	1.92	7.792e-05	1.92	71.07
65536	789507	2.538e-08	2.89	2.918e-05	1.92	2.061e-05	1.92	374.7

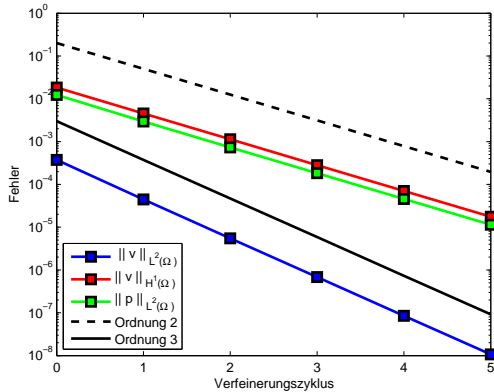
5.2.2 Grafiken



(a) Berechnung ohne zusätzliche Stabilisierung.

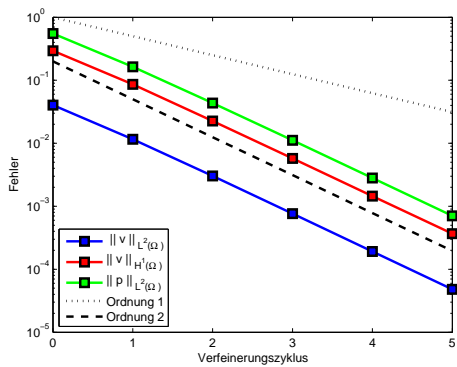


(b) Berechnung mit Druckstabilisierung.

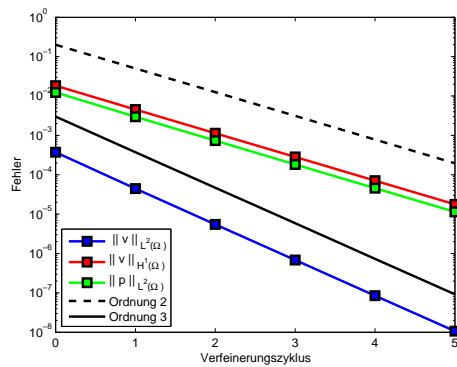


(c) Berechnung mit konsistenter Stabilisierung.

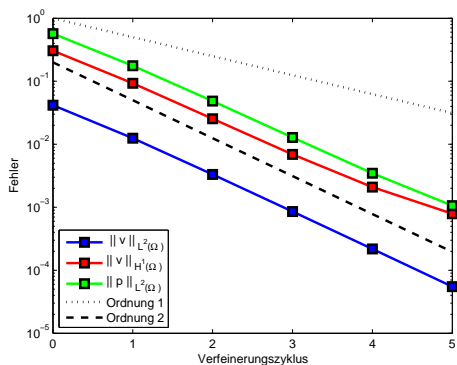
Abbildung 5.3: Visualisierung des Fehlers und der Konvergenzordnung bei Berechnung des Modellproblems aus Abschnitt 4.1 mit Q^2 - Q^2 finiten Elementen.



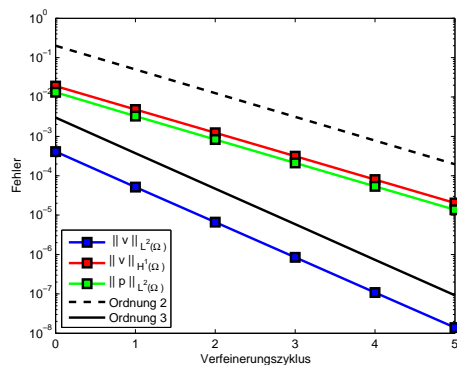
(a) Störung um $\delta = 0.01$.



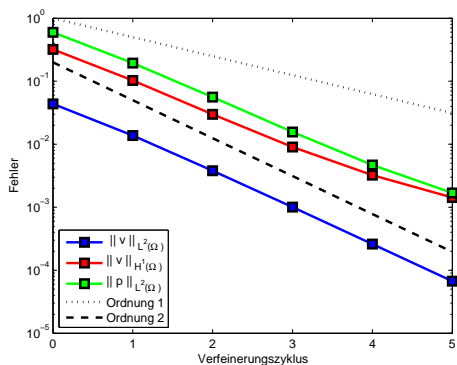
(b) Störung um $\delta = 0.01$.



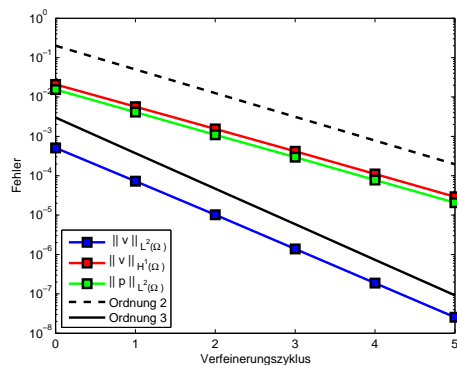
(c) Störung um $\delta = 0.1$.



(d) Störung um $\delta = 0.1$.



(e) Störung um $\delta = 0.2$.



(f) Störung um $\delta = 0.2$.

Abbildung 5.4: Visualisierung des Fehlers und der Konvergenzordnung bei Berechnung des Modellproblems aus Abschnitt 4.1 mit Q^2 - Q^2 finiten Elementen. Hierbei wurde eine Störung des Gitters um einen zufälligen Faktor kleiner als δh eingebaut. Für die Resultate in den Abbildungen (a), (c) und (e) wurde die Methode der Druckstabilisierung aus Abschnitt 2 auf Seite 7 zur Berechnung verwendet. Die Abbildungen (b), (d) und (f) beschreiben die konsistente Stabilisierungsmethode aus Abschnitt 3 auf Seite 19.

5.2.3 Auswertung

Ohne Stabilisierung ergibt sich wie bei Q^1 - Q^1 finiten Elementen diese Lösung nur durch Rundungsfehler.

Druckstabilisierung liefert eine konvergente Lösung mit passender Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ in der L^2 -Norm der Geschwindigkeit. Die H^1 -Halbnorm der Geschwindigkeit und der Druck konvergieren mit $\mathcal{O}(h^2)$ und ist somit superkonvergent.

Konsistente Stabilisierung ergibt eine Lösung, die mit gewünschter Ordnung $\mathcal{O}(h^3)$ in der L^2 -Norm der Geschwindigkeit, $\mathcal{O}(h^2)$ in der H^1 -Halbnorm der Geschwindigkeit und $\mathcal{O}(h^2)$ im Druck konvergiert.

Gitterstörung schwächt die Superkonvergenz der Druckstabilisierung stark ab, erreicht aber nicht ganz $\mathcal{O}(h^1)$. Die konsistente Stabilisierung ist sehr robust gegenüber Gitterstörung und behält nahezu die Konvergenzordnung.

5.3 Q^3 - Q^3 finite Elemente

5.3.1 Konvergenztabellen

Tabelle 5.19: Ohne Stabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1875	6.884e-06	-	6.685e-04	-	1.051e+04	-	0.12
256	7203	4.264e-07	4.01	8.298e-05	3.01	3.878e+03	1.44	0.53
1024	28227	2.655e-08	4.01	1.034e-05	3.00	8.612e+04	-4.47	3.05
4096	111747	1.656e-09	4.00	1.291e-06	3.00	8.151e+03	3.40	17.42
16384	444675	1.031e-10	4.01	1.613e-07	3.00	2.331e+04	-1.52	140.4
65536	1774083	6.923e-12	3.90	2.017e-08	3.00	2.852e+04	-0.29	1234

Tabelle 5.20: Mit Druckstabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1875	4.014e-02	-	2.930e-01	-	5.490e-01	-	0.28
256	7203	1.152e-02	1.80	8.521e-02	1.78	1.625e-01	1.76	1.15
1024	28227	2.994e-03	1.94	2.235e-02	1.93	4.310e-02	1.91	5.03
4096	111747	7.561e-04	1.99	5.671e-03	1.98	1.100e-02	1.97	24.41
16384	444675	1.895e-04	2.00	1.424e-03	1.99	2.768e-03	1.99	141.8
65536	1774083	4.741e-05	2.00	3.564e-04	2.00	6.934e-04	2.00	995.9

Tabelle 5.21: Mit konsistenter Stabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1875	1.828e-05	-	9.513e-04	-	8.737e-04	-	1.10
256	7203	1.016e-06	4.17	1.091e-04	3.12	9.495e-05	3.20	4.33
1024	28227	6.080e-08	4.06	1.317e-05	3.05	1.116e-05	3.09	17.55
4096	111747	3.757e-09	4.02	1.630e-06	3.01	1.364e-06	3.03	74.10
16384	444675	2.477e-10	3.92	2.139e-07	2.93	1.818e-07	2.91	340.4
65536	1774083	8.302e-11	1.58	1.379e-07	0.63	1.372e-07	0.41	1805

Tabelle 5.22: Mit Druckstabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.01h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1875	4.028e-02	-	2.940e-01	-	5.510e-01	-	0.30
256	7203	1.160e-02	1.80	8.581e-02	1.78	1.636e-01	1.75	1.17
1024	28227	3.021e-03	1.94	2.257e-02	1.93	4.352e-02	1.91	5.03
4096	111747	7.639e-04	1.98	5.738e-03	1.98	1.112e-02	1.97	24.33
16384	444675	1.917e-04	1.99	1.447e-03	1.99	2.805e-03	1.99	141.0
65536	1774083	4.798e-05	2.00	3.675e-04	1.98	7.059e-04	1.99	1001

Tabelle 5.23: Mit Druckstabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.1h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1875	4.173e-02	-	3.048e-01	-	5.711e-01	-	0.29
256	7203	1.246e-02	1.74	9.253e-02	1.72	1.762e-01	1.70	1.13
1024	28227	3.327e-03	1.90	2.530e-02	1.87	4.839e-02	1.86	4.87
4096	111747	8.560e-04	1.96	6.901e-03	1.87	1.280e-02	1.92	23.84
16384	444675	2.175e-04	1.98	2.083e-03	1.73	3.460e-03	1.89	139.7
65536	1774083	5.503e-05	1.98	7.848e-04	1.41	1.054e-03	1.72	998.8

Tabelle 5.24: Mit Druckstabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.2h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1875	4.373e-02	-	3.197e-01	-	5.987e-01	-	0.29
256	7203	1.372e-02	1.67	1.026e-01	1.64	1.946e-01	1.62	1.13
1024	28227	3.801e-03	1.85	2.982e-02	1.78	5.603e-02	1.80	4.97
4096	111747	1.004e-03	1.92	8.995e-03	1.73	1.564e-02	1.84	24.0
16384	444675	2.602e-04	1.95	3.215e-03	1.48	4.651e-03	1.75	138.8
65536	1774083	6.692e-05	1.96	1.420e-03	1.18	1.669e-03	1.48	996.2

Tabelle 5.25: Mit konsistenter Stabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.01h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1875	1.834e-05	-	9.532e-04	-	8.757e-04	-	1.10
256	7203	1.020e-06	4.17	1.093e-04	3.12	9.521e-05	3.20	4.40
1024	28227	6.106e-08	4.06	1.321e-05	3.05	1.119e-05	3.09	17.73
4096	111747	3.775e-09	4.02	1.635e-06	3.01	1.368e-06	3.03	74.72
16384	444675	2.495e-10	3.92	2.149e-07	2.93	1.828e-07	2.90	345.7
65536	1774083	8.466e-11	1.56	1.400e-07	0.62	1.393e-07	0.39	1810

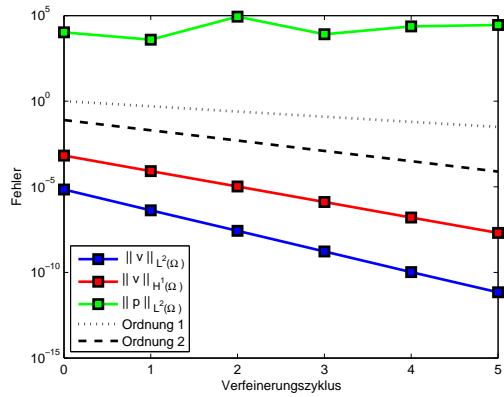
Tabelle 5.26: Mit konsistenter Stabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.1h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1875	2.015e-05	-	1.009e-03	-	9.259e-04	-	1.10
256	7203	1.276e-06	3.98	1.222e-04	3.05	1.060e-04	3.13	4.47
1024	28227	8.606e-08	3.89	1.549e-05	2.98	1.303e-05	3.02	17.60
4096	111747	5.841e-09	3.88	2.004e-06	2.95	1.663e-06	2.97	74.26
16384	444675	4.051e-10	3.85	2.724e-07	2.88	2.294e-07	2.86	340.3
65536	1774083	1.006e-10	2.01	1.665e-07	0.71	1.655e-07	0.47	1799

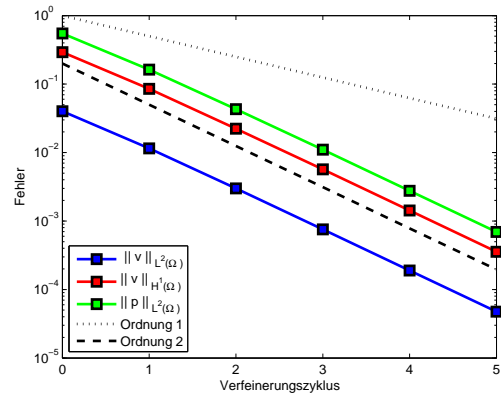
Tabelle 5.27: Mit konsistenter Stabilisierung und Gitterstörung um maximal $0.2h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1875	2.518e-05	-	1.157e-03	-	1.058e-03	-	1.08
256	7203	2.174e-06	3.53	1.640e-04	2.82	1.423e-04	2.89	4.30
1024	28227	1.870e-07	3.54	2.381e-05	2.78	2.008e-05	2.82	17.77
4096	111747	1.508e-08	3.63	3.466e-06	2.78	2.895e-06	2.79	75.26
16384	444675	1.165e-09	3.69	5.078e-07	2.77	4.278e-07	2.76	343.2
65536	1774083	1.531e-10	2.93	2.403e-07	1.08	2.376e-07	0.85	1819

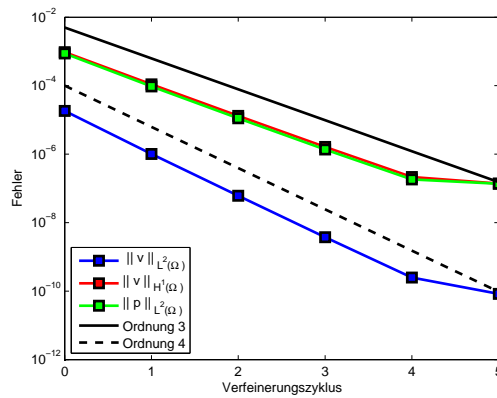
5.3.2 Grafiken



(a) Berechnung ohne zusätzliche Stabilisierung.

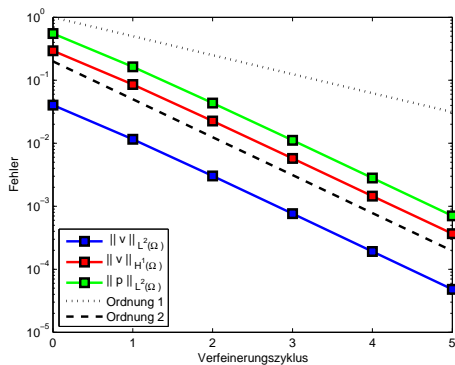


(b) Berechnung mit Druckstabilisierung.

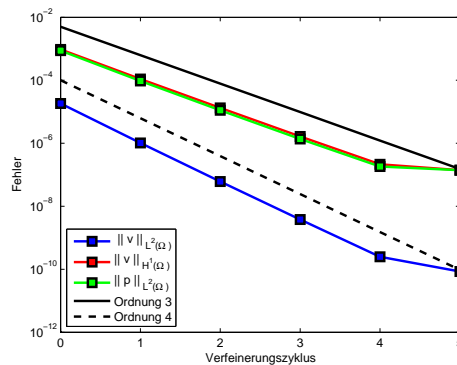


(c) Berechnung mit konsistenter Stabilisierung.

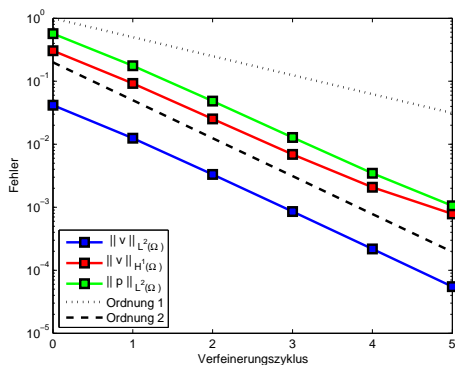
Abbildung 5.5: Visualisierung des Fehlers und der Konvergenzordnung bei Berechnung des Modellproblems aus Abschnitt 4.1 mit Q^3 - Q^3 finiten Elementen.



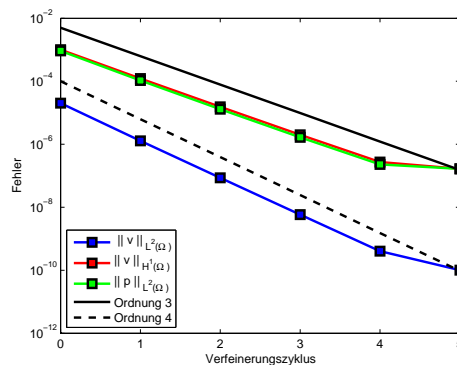
(a) Störung um $\delta = 0.01$.



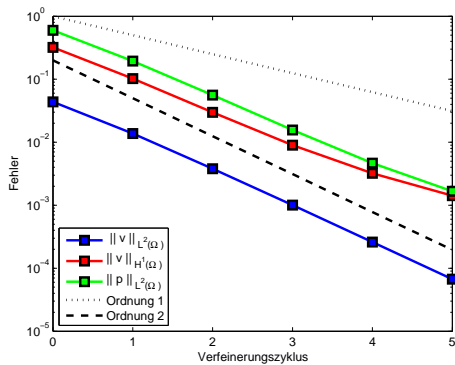
(b) Störung um $\delta = 0.01$.



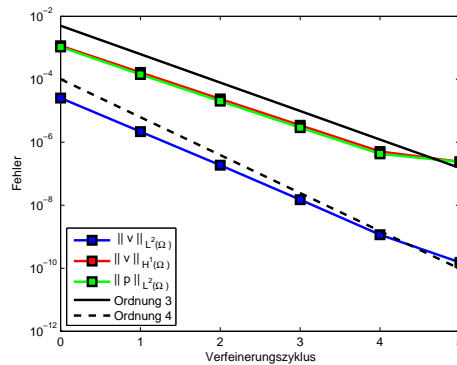
(c) Störung um $\delta = 0.1$.



(d) Störung um $\delta = 0.1$.



(e) Störung um $\delta = 0.2$.



(f) Störung um $\delta = 0.2$.

Abbildung 5.6: Visualisierung des Fehlers und der Konvergenzordnung bei Berechnung des Modellproblems aus Abschnitt 4.1 mit Q^3 - Q^3 finiten Elementen. Hierbei wurde eine Störung des Gitters um einen zufälligen Faktor kleiner als δh eingebaut. Für die Resultate in den Abbildungen (a), (c) und (e) wurde die Methode der Druckstabilisierung aus Abschnitt 2 auf Seite 7 zur Berechnung verwendet. Die Abbildungen (b), (d) und (f) beschreiben die konsistente Stabilisierungsmethode aus Abschnitt 3 auf Seite 19.

5.3.3 Auswertung

Ohne Stabilisierung ergibt sich wie bei Q^1 - Q^1 und Q^2 - Q^2 Elementen keine Lösung.

Druckstabilisierung zeigt Superkonvergenzeffekte in der H^1 -Halbnorm der Geschwindigkeit und im Druck. Beide Fehler konvergieren mit Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ statt erwarteter Ordnung $\mathcal{O}(h^1)$. Der L^2 -Fehler der Geschwindigkeit konvergiert mit erwarteter Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$.

Konsistente Stabilisierung ergibt eine Lösung, die mit erwarteter 4. Ordnung im L^2 -Fehler der Geschwindigkeit und mit 3. Ordnung im Druck und dem H^1 -Fehler der Geschwindigkeit konvergiert. Nach bereits fünf Verfeinerungen verschlechtert sich die Fehlerreduktion stark. Bedingt durch die schlechte Konditionierung der Systemmatrix kann der Fehler in der Lösung, bedingt durch die Maschinengenauigkeit, nicht weiter verbessert werden.

Gitterstörung zeigt im druckstabilisierten Verfahren erneut, dass die Superkonvergenzeffekte auf nicht-äquidistantem Gitter verringert werden. Das Verfahren mit konsistenter Stabilisierung ist robuster gegenüber Gitterstörung, verliert jedoch schneller ihre Konvergenzordnung im Vergleich zu Gitterstörung bei Q^2 - Q^2 Elementen. Dies beruht vermutlich auf der Konditionierung der Systemmatrix und der Maschinengenauigkeit, wodurch die Konvergenzgeschwindigkeit gestört wird.

5.4 Q^2 - Q^1 finite Elemente

5.4.1 Konvergenztabellen

Tabelle 5.28: Ohne Stabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	659	3.585e-04	-	1.877e-02	-	2.601e-02	-	0.02
256	2467	4.386e-05	3.03	4.561e-03	2.04	6.413e-03	2.02	0.09
1024	9539	5.452e-06	3.01	1.131e-03	2.01	1.598e-03	2.00	0.45
4096	37507	6.805e-07	3.00	2.823e-04	2.00	3.991e-04	2.00	2.68
16384	148739	8.503e-08	3.00	7.054e-05	2.00	9.975e-05	2.00	22.88
65536	592387	1.063e-08	3.00	1.763e-05	2.00	2.494e-05	2.00	218.9
262144	2364419	1.328e-09	3.00	4.408e-06	2.00	6.241e-06	2.00	2355

Tabelle 5.29: Mit Druckstabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	659	4.060e-02	-	2.966e-01	-	5.540e-01	-	0.05
256	2467	1.156e-02	1.81	8.557e-02	1.79	1.629e-01	1.77	0.18
1024	9539	2.996e-03	1.95	2.240e-02	1.93	4.315e-02	1.92	0.78
4096	37507	7.562e-04	1.99	5.679e-03	1.98	1.100e-02	1.97	3.72
16384	148739	1.895e-04	2.00	1.426e-03	1.99	2.770e-03	1.99	18.69
65536	592387	4.741e-05	2.00	3.569e-04	2.00	6.939e-04	2.00	124.6

Tabelle 5.30: Mit konsistenter Stabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	659	4.619e-04	-	1.891e-02	-	2.628e-02	-	0.17
256	2467	4.684e-05	3.30	4.562e-03	2.05	6.416e-03	2.03	0.61
1024	9539	5.539e-06	3.08	1.131e-03	2.01	1.598e-03	2.01	2.50
4096	37507	6.831e-07	3.02	2.823e-04	2.00	3.991e-04	2.00	10.64
16384	148739	8.511e-08	3.00	7.054e-05	2.00	9.975e-05	2.00	46.12
65536	592387	1.063e-08	3.00	1.763e-05	2.00	2.494e-05	2.00	235.0

Tabelle 5.31: Ohne Stabilisierung und mit Gitterstörung um maximal $0.01h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	659	3.586e-04	-	1.877e-02	-	2.602e-02	-	0.03
256	2467	4.390e-05	3.03	4.563e-03	2.04	6.417e-03	2.02	0.09
1024	9539	5.459e-06	3.01	1.132e-03	2.01	1.599e-03	2.00	0.45
4096	37507	6.818e-07	3.00	2.826e-04	2.00	3.995e-04	2.00	2.72
16384	148739	8.522e-08	3.00	7.063e-05	2.00	9.986e-05	2.00	23.05
65536	592387	1.065e-08	3.00	1.766e-05	2.00	2.497e-05	2.00	220.1

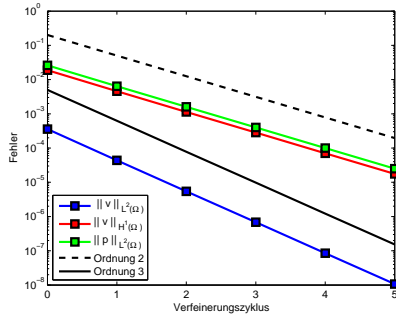
Tabelle 5.32: Ohne Stabilisierung und mit Gitterstörung um maximal $0.1h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	659	3.795e-04	-	1.943e-02	-	2.662e-02	-	0.04
256	2467	4.895e-05	2.95	4.884e-03	1.99	6.720e-03	1.99	0.09
1024	9539	6.326e-06	2.95	1.245e-03	1.97	1.706e-03	1.98	0.46
4096	37507	8.267e-07	2.94	3.190e-04	1.96	4.338e-04	1.98	2.69
16384	148739	1.057e-07	2.97	8.110e-05	1.98	1.098e-04	1.98	22.93
65536	592387	1.353e-08	2.97	2.059e-05	1.98	2.773e-05	1.99	219.3

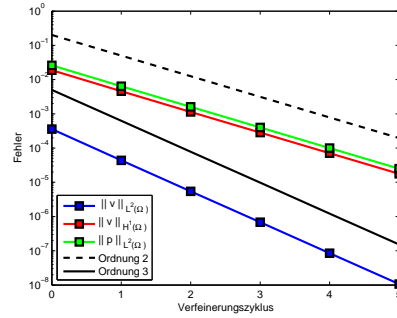
Tabelle 5.33: Ohne Stabilisierung und mit Gitterstörung um maximal $0.2h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	659	4.384e-04	-	2.138e-02	-	2.834e-02	-	0.04
256	2467	6.276e-05	2.80	5.779e-03	1.89	7.551e-03	1.91	0.08
1024	9539	8.860e-06	2.82	1.566e-03	1.88	2.003e-03	1.91	0.47
4096	37507	1.268e-06	2.81	4.245e-04	1.88	5.305e-04	1.92	2.68
16384	148739	1.717e-07	2.88	1.121e-04	1.92	1.380e-04	1.94	22.45
65536	592387	2.320e-08	2.89	2.947e-05	1.93	3.569e-05	1.95	219.3

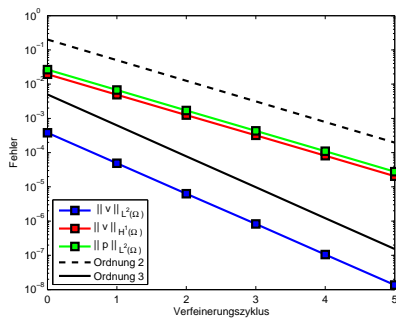
5.4.2 Grafiken



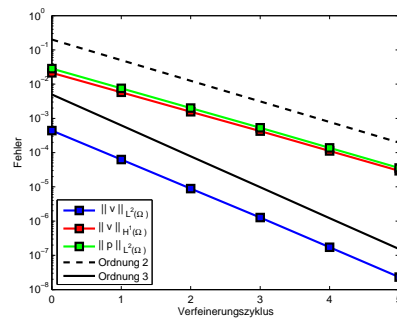
(a) Ohne Stabilisierung



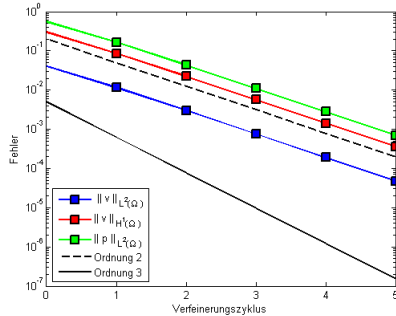
(b) Störung um $\delta = 0.01$.



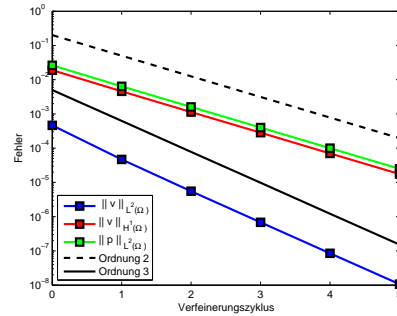
(c) Störung um $\delta = 0.1$.



(d) Störung um $\delta = 0.2$.



(e) Mit Druckstabilisierung



(f) Mit konsistenter Stabilisierung

Abbildung 5.7: Visualisierung des Fehlers und der Konvergenzordnung bei Berechnung des Modellproblems aus Abschnitt 4.1 mit Q^2 - Q^1 finiten Elementen. Hierbei wurde bei einigen Berechnungen eine Störung des Gitters um einen zufälligen Faktor kleiner als δh eingebaut. In Abbildung (a) bis (d) wurde die Stokes-Gleichung ohne Stabilisierung wie in Abschnitt 1 auf Seite 1 beschrieben zur Berechnung verwendet. Die Abbildung (e) beschreibt die Druckstabilisierung aus Abschnitt 2 auf Seite 7 und Abbildung (e) die konsistente Stabilisierung aus Abschnitt 3 auf Seite 19.

5.4.3 Auswertung

Ohne Stabilisierung konvergiert das Verfahren sehr gut, da das Q^2-Q^1 Element die inf-sup-Bedingung erfüllt. Die Konvergenzraten entsprechen der Theorie: Der H^1 -Fehler der Geschwindigkeit und der L^2 -Fehler im Druck verhalten sich wie $\mathcal{O}(h^2)$, der L^2 Fehler der Geschwindigkeit besitzt eine Ordnung mehr.

Druckstabilisierung liefert eine konvergente Lösung, die jedoch wieder mit Superkonvergenz erreicht wird. Die Laufzeit des Verfahrens ist viel geringer als die Laufzeit der anderen Verfahren. Eine Erklärung hierfür gibt es im Moment nicht.

Konsistente Stabilisierung ergibt eine Lösung, die mit gleicher Ordnung wie das nicht stabilisierte Verfahren konvergiert. Die Berechnung ist im Vergleich aber viel teurer, da zweite Ableitungen berechnet werden müssen. Die berechneten Fehler, im Vergleich zur Rechnung ohne Stabilisierung, unterscheiden sich kaum.

Gitterstörung wurde bei Q^2-Q^1 Elementen nur auf die Berechnung ohne Stabilisierung angewendet. Wenn man bereits inf-sup-stabile Ansatzräume verwendet, so kann auf die aufwändigere Stabilisierung verzichtet werden. Wie in den Tabellen und den Grafiken zu sehen ist, bleibt auch unter Gitterstörung die Konvergenzordnung gut erhalten.

5.5 Q^3 - Q^2 finite Elemente

5.5.1 Konvergenztabellen

Tabelle 5.34: Ohne Stabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1539	2.041e-05	-	1.349e-03	-	1.509e-03	-	0.08
256	5891	1.353e-06	3.92	1.746e-04	2.95	1.922e-04	2.97	0.34
1024	23043	8.633e-08	3.97	2.209e-05	2.98	2.414e-05	2.99	1.72
4096	91139	5.438e-09	3.99	2.775e-06	2.99	3.021e-06	3.00	10.10
16384	362499	3.409e-10	4.00	3.476e-07	3.00	3.777e-07	3.00	65.50
65536	1445891	2.136e-11	4.00	4.349e-08	3.00	4.722e-08	3.00	472.9

Tabelle 5.35: Mit Druckstabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1539	4.014e-02	-	2.930e-01	-	5.489e-01	-	0.20
256	5891	1.152e-02	1.80	8.521e-02	1.78	1.625e-01	1.76	0.84
1024	23043	2.994e-03	1.94	2.235e-02	1.93	4.310e-02	1.91	3.65
4096	91139	7.561e-04	1.99	5.671e-03	1.98	1.100e-02	1.97	17.37
16384	362499	1.895e-04	2.00	1.424e-03	1.99	2.768e-03	1.99	100.3
65536	1445891	4.741e-05	2.00	3.564e-04	2.00	6.934e-04	2.00	709.6

Tabelle 5.36: Mit konsistenter Stabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1539	1.182e-04	-	1.647e-03	-	2.268e-03	-	0.80
256	5891	7.651e-06	3.95	1.854e-04	3.15	2.223e-04	3.35	3.13
1024	23043	4.867e-07	3.97	2.245e-05	3.05	2.518e-05	3.14	12.86
4096	91139	3.069e-08	3.99	2.787e-06	3.01	3.055e-06	3.04	54.39
16384	362499	1.928e-09	3.99	3.544e-07	2.97	3.847e-07	2.99	248.3
65536	1445891	1.457e-10	3.73	1.424e-07	1.32	1.436e-07	1.42	1806

Tabelle 5.37: Ohne Stabilisierung und mit Gitterstörung um maximal $0.01h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1539	2.041e-05	-	1.349e-03	-	1.509e-03	-	0.08
256	5891	1.354e-06	3.91	1.746e-04	2.95	1.922e-04	2.97	0.32
1024	23043	8.638e-08	3.97	2.211e-05	2.98	2.415e-05	2.99	1.74
4096	91139	5.443e-09	3.99	2.778e-06	2.99	3.023e-06	3.00	10.19
16384	362499	3.414e-10	3.99	3.481e-07	3.00	3.781e-07	3.00	65.70
65536	1445891	2.138e-11	4.00	4.356e-08	3.00	4.727e-08	3.00	473.6

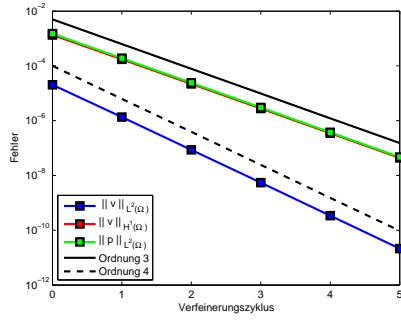
Tabelle 5.38: Ohne Stabilisierung und mit Gitterstörung um maximal $0.1h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1539	2.068e-05	-	1.369e-03	-	1.525e-03	-	0.08
256	5891	1.403e-06	3.88	1.816e-04	2.91	1.981e-04	2.94	0.32
1024	23043	9.263e-08	3.92	2.371e-05	2.94	2.557e-05	2.95	1.70
4096	91139	6.073e-09	3.93	3.073e-06	2.95	3.292e-06	2.96	10.14
16384	362499	3.970e-10	3.94	3.967e-07	2.95	4.229e-07	2.96	65.56
65536	1445891	2.589e-11	3.94	5.105e-08	2.96	5.424e-08	2.96	471.6

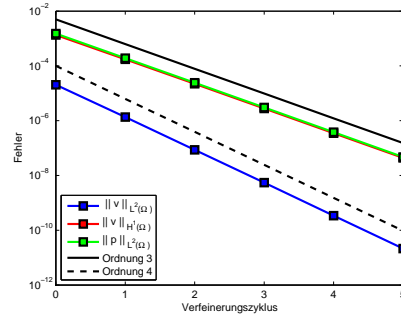
Tabelle 5.39: Ohne Stabilisierung und mit Gitterstörung um maximal $0.2h$.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1539	2.156e-05	-	1.432e-03	-	1.579e-03	-	0.09
256	5891	1.596e-06	3.76	2.054e-04	2.80	2.191e-04	2.85	0.32
1024	23043	1.207e-07	3.72	2.974e-05	2.79	3.105e-05	2.82	1.74
4096	91139	9.252e-09	3.71	4.270e-06	2.80	4.397e-06	2.82	10.26
16384	362499	7.008e-10	3.72	6.047e-07	2.82	6.163e-07	2.83	66.23
65536	1445891	5.199e-11	3.75	8.431e-08	2.84	8.527e-08	2.85	475.1

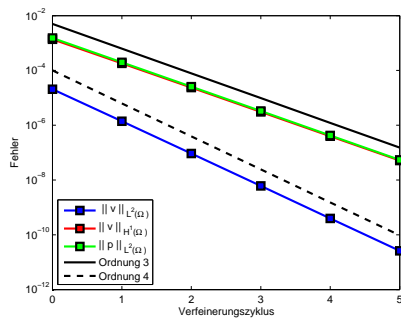
5.5.2 Grafiken



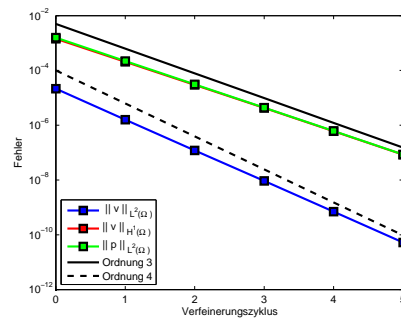
(a) Ohne Stabilisierung



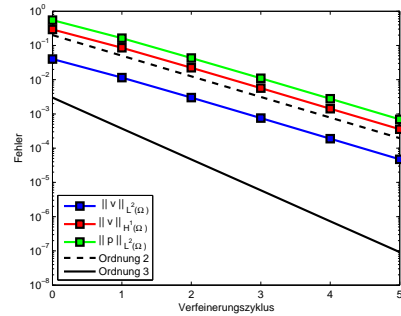
(b) Störung um $\delta = 0.01$.



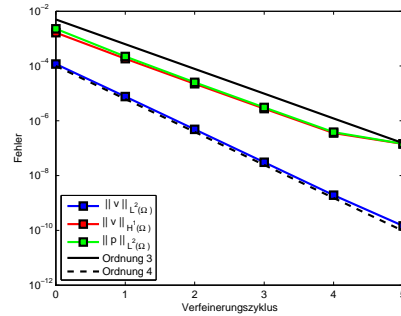
(c) Störung um $\delta = 0.1$.



(d) Störung um $\delta = 0.2$.



(e) Mit Druckstabilisierung



(f) Mit konsistenter Stabilisierung

Abbildung 5.8: Visualisierung des Fehlers und der Konvergenzordnung bei Berechnung des Modellproblems aus Abschnitt 4.1 mit Q^3 - Q^2 finiten Elementen. Hierbei wurde bei einigen Berechnungen eine Störung des Gitters um einen zufälligen Faktor kleiner als δh eingebaut. In Abbildung (a) bis (d) wurde die Stokes-Gleichung ohne Stabilisierung wie in Abschnitt 1 auf Seite 1 beschrieben zur Berechnung verwendet. Die Abbildung (e) beschreibt die Druckstabilisierung aus Abschnitt 2 auf Seite 7 und Abbildung (e) die konsistente Stabilisierung aus Abschnitt 3 auf Seite 19.

5.5.3 Auswertung

Ohne Stabilisierung konvergiert das Verfahren, wie bei Q^2 - Q^1 Elementen, mit der gewünschten 3. Ordnung im Druck und der H^1 -Halbnorm der Geschwindigkeit. Der L^2 -Fehler der Geschwindigkeit konvergiert entsprechend eine Ordnung besser.

Druckstabilisierung konvergiert weiterhin mit Superkonvergenz, benötigt nun aber viel mehr Zeit im Vergleich zur Berechnung ohne Stabilisierung. Bei Q^2 - Q^1 Elementen ist die Berechnung mit Druckstabilisierung schneller.

Konsistente Stabilisierung liefert die gleiche Ordnung wie die Berechnung ohne Stabilisierung, bricht jedoch bei zu starker Verfeinerung ein. Der Unterschied der Laufzeit ist enorm.

Gitterstörung betrachten wir wieder nur für die Berechnung ohne Stabilisierung. Wie bei der Berechnung mit Q^2 - Q^1 Elementen ist das Verfahren stabil unter Gitterstörung. Die Ordnung des Verfahrens nimmt ab, bricht jedoch nicht so stark zusammen wie bei obigen Berechnungen mit Druckstabilisierung.

5.6 Konvergenz in Abhängigkeit der Rechenzeit

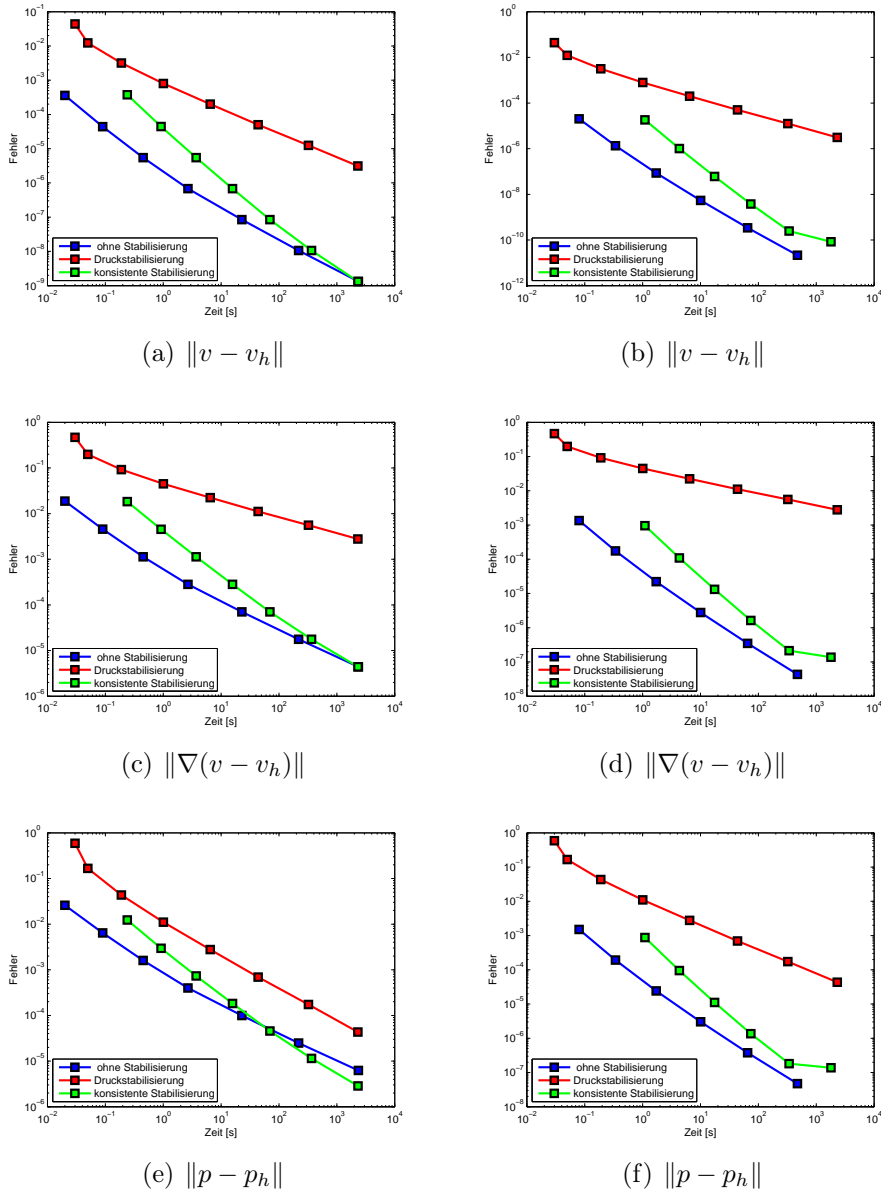


Abbildung 5.9: Vergleich zwischen Laufzeit und Fehler in der Lösung. Die Grafiken (a), (c) und (e) visualisieren die Berechnung ohne Stabilisierung mit Q^2 - Q^1 finiten Elementen, mit Druckstabilisierung mit Q^1 - Q^1 finiten Elementen und konsistenter Stabilisierung mit Q^2 - Q^2 finiten Elementen. Die Grafiken (b), (d) und (e) visualisieren die Berechnung ohne Stabilisierung mit Q^3 - Q^2 finiten Elementen, mit Druckstabilisierung mit Q^1 - Q^1 finiten Elementen und konsistenter Stabilisierung mit Q^3 - Q^3 finiten Elementen.

5.7 Zusammenfassung

Wie man in Abbildung 5.9 sehr gut sehen kann, liefert die Druckstabilisierung in allen betrachteten Fehlernormen schlechtere Ergebnisse als die Berechnung ohne Stabilisierung und die Berechnung mit konsistenter Stabilisierung. Hierbei wurden die Berechnungen um zwei weitere Verfeinerungszyklen erweitert, um einen guten Vergleich bei entsprechend längerer Laufzeit abzubilden.

Die konsistente Stabilisierung liefert bei Q^3 - Q^3 Elementen offenbar eine schlechter konditionierte Systemmatrix und kann daher bei Verfeinerung den Fehler nicht wesentlich, über eine gewisse Schranke hinweg, reduzieren. Im Falle der Q^2 - Q^2 Elemente sind die Ergebnisse bei ausreichender Verfeinerung und damit entsprechend langer Laufzeiten vergleichbar mit der Berechnung ohne Stabilisierung. Im Fehler in der L^2 -Norm des Drucks bei den Verfahren 2. Ordnung ist die konsistente Stabilisierung bei starker Verfeinerung besser als die berechnete Lösung ohne Stabilisierung.

Wenn man nach den Ergebnissen dieser Arbeit geht, empfiehlt es sich Taylor-Hood-Elemente für unstabilisierte Stokes-Gleichungen zur Berechnung der Lösung zu verwenden. Die Methode der Druckstabilisierung liefert auf äquidistantem Gitter in dem betrachteten Beispiel Superkonvergenz, ist in den Ergebnissen wesentlich schlechter als die anderen Methoden. Auf nicht perfekten Gittern ist die Methode der Druckstabilisierung nicht zu empfehlen, da sie nur lineare Konvergenz liefert.

5.8 Ausblick

In dieser Arbeit wurden noch nicht alle freien Parameter betrachtet und es gibt noch viele Möglichkeiten für weitere Forschung.

- Die numerischen Daten stammen von einem Beispiel auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$ mit einer konstruierten Lösung in $v, p \in C^\infty(\Omega)^{2,1}$. Eine Erweiterung wäre nun die Betrachtung eines komplizierteren Beispiels.
- Ebenso wurde in dieser Arbeit noch nicht auf die entstehende Systemmatrix eingegangen. In der Implementierung wurde ein direkter Löser des UMFPACK-Paketes verwendet. Gegebenenfalls entstehen mit anderen Lösern andere Resultate in Bezug auf Rechenzeit sowie Genauigkeit und bei iterativen Lösern in Bezug auf die Anzahl der Iterationsschritte.
- Die Aussagen der Sätze über die a priori Abschätzungen beschreiben die Konvergenzordnung in Bezug auf h -Potenzen, was bei globaler Gitterverfeinerung der Größe jeder Zelle entspricht. Wie sich die Fehler bei adaptiver Verfeinerung verhalten, ist damit jedoch nicht untersucht.
- Schließlich gibt es zwei Parameter in der Gleichung, die bisher immer auf vorgegebene Werte gesetzt wurden. Die Viskosität ν des Fluids wurde auf 1 gesetzt, um die Konstanten in den Beweisen nicht unnötig komplizierter zu gestalten. Viel wichtiger

ist der Stabilisierungsparameter α , der in den Gleichungen der Druckstabilisierung (2.3) und der konsistenten Stabilisierung (3.2) auftritt. Im Zuge der Realisierung in dieser Arbeit wurde dieser Parameter auf 0.1 gesetzt. Zu Untersuchen bleibt die Auswirkung stärkerer und schwächerer Stabilisierung.

Literaturverzeichnis

- [1] W. Bangerth, R. Hartmann, and G. Kanschat. deal.II — a general purpose object oriented finite element library. *ACM Trans. Math. Softw.*, 33(4), 2007.
- [2] W. Bangerth and G. Kanschat. deal.II *Differential Equations Analysis Library, Technical Reference*, 2011. <http://www.dealii.org>.
- [3] R. Becker and M. Braack. *A Finite Element Pressure Gradient Stabilization for the Stokes Equations Based on Local Projections*. Springer, 2001.
- [4] D. Braess. *Finite Elemente, Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003.
- [5] S. Ganesan, G. Matthies, and L. Tobiska. *Local projection stabilization of equal order interpolation applied to the Stokes problem*. 2008.
- [6] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1986.
- [7] T.J.R. Hughes and L.P. Franca. *A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII. The Stokes problem with various well-posed boundary conditions: symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces*. North-Holland, 1987.
- [8] R. Rannacher. *Numerische Mathematik 3 (Numerik von Problemen der Kontinuumsmechanik) - Vorlesungsskript*. Universität Heidelberg, 2001.
- [9] R. Rannacher. *Numerische Mathematik 2 (Numerik Partieller Differentialgleichungen) - Vorlesungsskript*. Universität Heidelberg, 2008.
- [10] R. Rannacher. *Numerische Mathematik (Numerik gewöhnlicher und einfacher partieller Differentialgleichungen) - Vorlesungsskript*. Universität Heidelberg, 2012.
- [11] T. Richter. *Die Finite Elemente Methode für partielle Differentialgleichungen - Vorlesungsskript*. Universität Heidelberg, 2011.
- [12] T. Richter. *Numerische Methoden für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen - Vorlesungsskript*. Universität Heidelberg, 2011.
- [13] T. Richter. *Numerische Methoden der Strömungsmechanik - Vorlesungsskript*. Universität Heidelberg, 2012.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe verfasst habe. Alle verwendeten Quellen sind im Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit angegeben.

Heidelberg, 1. Juli 2013
