

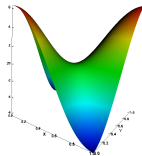
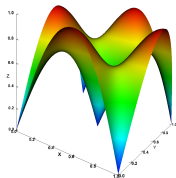
Druckstabilisierung der Stokes-Gleichung

Bachelorseminar

Philipp Siehr

Heidelberg

20. Juni 2013



THEORIE DER STOKES-GLEICHUNG

Stokes – starke Formulierung

Suche $v \in C^2(\Omega)^d$ und $p \in C^1(\Omega)$ mit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ und $f \in L^2(\Omega)^d$ sodass:

$$-\nu \Delta v + \nabla p = f, \quad \text{in } \Omega$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad \text{in } \Omega$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0.$$

- Der Parameter $\nu \in \mathbb{R}^+$ beschreibt die Viskosität des Fluids.

Stokes – starke Formulierung

Suche $v \in C^2(\Omega)^d$ und $p \in C^1(\Omega)$ mit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ und $f \in L^2(\Omega)^d$ sodass:

$$\begin{aligned} -\nu \Delta v + \nabla p &= f, & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot v &= 0, & \text{in } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Stokes – schwache Formulierung

Suche $v \in V = H_0^1(\Omega)^d$ und $p \in Q = L_0^2(\Omega)$ mit $f \in L^2(\Omega)^d$ sodass:

$$\begin{aligned} (\nu \nabla v, \nabla \phi) - (p, \nabla \cdot \phi) &= (f, \phi), & \forall \phi \in V, \\ (\nabla \cdot v, \xi) &= 0, & \forall \xi \in Q. \end{aligned}$$

- $L_0^2(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} f dx = 0\}$
- Der Parameter $\nu \in \mathbb{R}^+$ beschreibt die Viskosität des Fluids.

Beispiel: Stokes – Modellproblem

Suche $v \in C^2(\Omega)^2$ und $p \in C^1(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sodass:

$$-\nu \Delta v + \nabla p = f, \quad \text{in } \Omega$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad \text{in } \Omega$$

$$v|_{\partial\Omega} = \bar{v}.$$

Beispiel: Stokes – Modellproblem

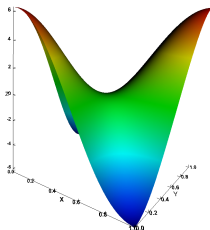
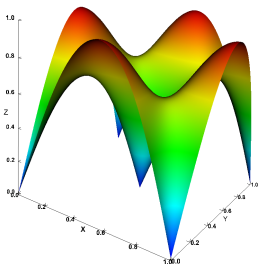
Suche $v \in C^2(\Omega)^2$ und $p \in C^1(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sodass:

$$\begin{aligned} -\nu \Delta v + \nabla p &= f, & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot v &= 0, & \text{in } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} &= \bar{v}. \end{aligned}$$

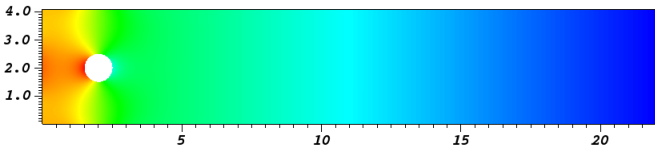
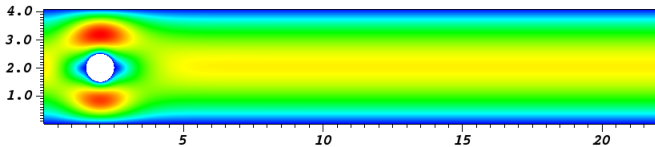
- $\Omega = (0, 1)^2$
- $\nu = 1$
- $f = (0, -4\pi^2 \cos(\pi x) \sin(\pi y))^T$

Exakte Lösung:

- $\bar{v}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ -\cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{pmatrix}$
- $\bar{p}(x, y) = 2\pi \cos(\pi x) \cos(\pi y)$



- $\bar{v}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ -\cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{pmatrix}$
- $\bar{p}(x, y) = 2\pi \cos(\pi x) \cos(\pi y)$
- Q^2 - Q^1 finite Elemente
- 262144 Zellen (512×512)
- 2364419 Freiheitsgrade



Stokes – schwache Formulierung

Suche $v \in V = H_0^1(\Omega)^d$ und $p \in Q = L_0^2(\Omega)$ mit $f \in L^2(\Omega)^d$ sodass:

$$\begin{aligned}(\nu \nabla v, \nabla \phi) - (p, \nabla \cdot \phi) &= (f, \phi), & \forall \phi \in V, \\(\nabla \cdot v, \xi) &= 0, & \forall \xi \in Q.\end{aligned}$$

Stokes – schwache Formulierung

Suche $v \in V = H_0^1(\Omega)^d$ und $p \in Q = L_0^2(\Omega)$ mit $f \in L^2(\Omega)^d$ sodass:

$$\begin{aligned}(\nu \nabla v, \nabla \phi) - (p, \nabla \cdot \phi) &= (f, \phi), & \forall \phi \in V, \\(\nabla \cdot v, \xi) &= 0, & \forall \xi \in Q.\end{aligned}$$

Stokes – diskrete schwache Formulierung

Suche $v_h \in V_h \subset V = H_g^1(\Omega)^d$ und $p_h \in Q_h \subset Q = L_0^2(\Omega)$ mit $f \in L^2(\Omega)^d$ sodass:

$$\begin{aligned}(\nu \nabla v_h, \nabla \phi_h) - (p_h, \nabla \cdot \phi_h) &= (f, \phi_h) & \forall \phi_h \in V_h \\(\nabla \cdot v_h, \xi_h) &= 0 & \forall \xi_h \in Q_h\end{aligned}$$

Frage:

Existiert eine eindeutige Lösung $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$?

Frage:

Existiert eine eindeutige Lösung $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$?

Antwort:

Es existiert eine eindeutige Lösung $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$ genau dann, wenn die diskrete inf-sup-Bedingung erfüllt ist:

$$\min_{q_h \in Q_h} \max_{\phi_h \in V_h} \frac{(q_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|q_h\| \|\nabla \phi_h\|} \geq \gamma_h \geq \gamma > 0.$$

Frage:

Existiert eine eindeutige Lösung $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$?

Antwort:

Es existiert eine eindeutige Lösung $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$ genau dann, wenn die diskrete inf-sup-Bedingung erfüllt ist:

$$\min_{q_h \in Q_h} \max_{\phi_h \in V_h} \frac{(q_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|q_h\| \|\nabla \phi_h\|} \geq \gamma_h \geq \gamma > 0.$$

Satz (A priori Abschätzung)

Wenn v und p hinreichend regulär sind, dann gilt:

$$\begin{aligned} \|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| &\leq \frac{c}{\gamma_h} \{h^{r_v} \|\nabla^{r_v} v\| + h^{r_p+1} \|\nabla^{r_p+1} p\|\} \\ \|v - v_h\| &\leq \frac{c}{\gamma_h} \{h^{r_v+1} \|\nabla^{r_v+1} v\| + h^{r_p+2} \|\nabla^{r_p+1} p\|\} \end{aligned}$$

mit der Konstanten γ_h aus der inf-sup-Bedingung.

Diskrete inf-sup-Bedingung

Es existiert eine eindeutige Lösung $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$ genau dann, wenn die diskrete inf-sup-Bedingung erfüllt ist:

$$\min_{q_h \in Q_h} \max_{\phi_h \in V_h} \frac{(q_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|q_h\| \|\nabla \phi_h\|} \geq \gamma_h \geq \gamma > 0.$$

Diskrete inf-sup-Bedingung

Es existiert eine eindeutige Lösung $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$ genau dann, wenn die diskrete inf-sup-Bedingung erfüllt ist:

$$\min_{q_h \in Q_h} \max_{\phi_h \in V_h} \frac{(q_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|q_h\| \|\nabla \phi_h\|} \geq \gamma_h \geq \gamma > 0.$$

Beispiele

- Vierecksgitter

- ▶ $Q^1 - Q^{0,\text{dc}}$ ist nicht stabil.
- ▶ $Q^k - Q^{k-1}$ ist stabil.
- ▶ $Q^k - Q^k$ ist nicht stabil.

(Schachbrett-Instabilität)
(Taylor-Hood Elemente)
(*equal-order*)

- $Q^r := \langle x^\alpha y^\beta, 0 \leq \alpha, \beta \leq r \rangle$
- $Q^r := \{ \phi \in C(\Omega) : \phi|_K \in Q^r \}$
- $Q^{r,\text{dc}} := \{ \phi \in L^2(\Omega) : \phi|_K \in Q^r \}$

DRUCKSTABILISIERUNG DER STOKES-GLEICHUNG

Modifizierte inf-sup-Bedingung

Für alle $p_h \in Q_h$ gilt:

$$\tilde{\gamma} \|p_h\| \leq \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{(p_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|} + \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Modifizierte inf-sup-Bedingung

Für alle $p_h \in Q_h$ gilt:

$$\tilde{\gamma} \|p_h\| \leq \sup_{\phi_h \in V_h} \frac{(p_h, \nabla \cdot \phi_h)}{\|\nabla \phi_h\|} + \left(\sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Druckstabilisierung der Stokes-Gleichung

Mit einem Stabilisierungsparameter $\alpha_0 > 0$ suche $\{v_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$, sodass

$$\begin{aligned} (\nabla v_h, \nabla \phi_h) - (p_h, \nabla \cdot \phi_h) &= (f, \phi_h) & \forall \phi_h \in V_h, \\ (\nabla \cdot v_h, \xi_h) + \alpha_0 \sum_{K \in \Omega_h} h_K^2 (\nabla p_h, \nabla \xi_h)_K &= 0 & \forall \xi_h \in Q_h. \end{aligned}$$

Satz (A priori Abschätzung ohne Modifizierung)

Wenn v und p hinreichend regulär sind, dann gilt:

$$\begin{aligned}\|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| &\leq \frac{c}{\gamma_h} \{h^{r_v} \|\nabla^{r_v} v\| + h^{r_p+1} \|\nabla^{r_p+1} p\|\}, \\ \|v - v_h\| &\leq \frac{c}{\gamma_h} \{h^{r_v+1} \|\nabla^{r_v+1} v\| + h^{r_p+2} \|\nabla^{r_p+1} p\|\},\end{aligned}$$

mit der Konstanten γ_h aus der inf-sup-Bedingung.

Satz (A priori Abschätzung ohne Modifizierung)

Wenn v und p hinreichend regulär sind, dann gilt:

$$\begin{aligned}\|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| &\leq \frac{c}{\gamma_h} \{h^{r_v} \|\nabla^{r_v} v\| + h^{r_p+1} \|\nabla^{r_p+1} p\|\}, \\ \|v - v_h\| &\leq \frac{c}{\gamma_h} \{h^{r_v+1} \|\nabla^{r_v+1} v\| + h^{r_p+2} \|\nabla^{r_p+1} p\|\},\end{aligned}$$

mit der Konstanten γ_h aus der inf-sup-Bedingung.

Satz (A priori Abschätzung mit Druckstabilisierung)

Wenn v und p hinreichend regulär sind, dann gilt für die Lösung $\{v_h, p_h\}$ der druckstabilisierten Stokes-Gleichung:

$$\begin{aligned}\|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| &\leq ch(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|), \\ \|v - v_h\| &\leq ch^2(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|).\end{aligned}$$

KONSISTENTE STABILISIERUNG DER STOKES-GLEICHUNG.

Stokes – starke Formulierung

Suche $v \in C^2(\Omega)^d$ und $p \in C^1(\Omega)$ mit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ und $f \in L^2(\Omega)^d$ sodass:

$$-\nu \Delta v + \nabla p = f, \quad \text{in } \Omega$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad \text{in } \Omega$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Stokes – starke Formulierung

Suche $v \in C^2(\Omega)^d$ und $p \in C^1(\Omega)$ mit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ und $f \in L^2(\Omega)^d$ sodass:

$$\begin{aligned} -\nu \Delta v + \nabla p &= f, & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot v &= 0, & \text{in } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

- Neue Testfunktion $\phi_h := \phi_h + \alpha h^2 \nabla \xi_h$.

Stokes – starke Formulierung

Suche $v \in C^2(\Omega)^d$ und $p \in C^1(\Omega)$ mit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ und $f \in L^2(\Omega)^d$ sodass:

$$\begin{aligned} -\nu \Delta v + \nabla p &= f, & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot v &= 0, & \text{in } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

- Neue Testfunktion $\phi_h := \phi_h + \alpha h^2 \nabla \xi_h$.

Stokes – konsistente Stabilisierung

Suche $v_h \in V_h$ and $p_h \in Q_h$ sodass:

$$\begin{aligned} (\nu \nabla v_h, \nabla \phi_h) - (p_h, \nabla \cdot \phi_h) &= (f, \phi_h), & \forall \phi_h \in V_h, \\ (\nabla \cdot v_h, \xi_h) + \alpha h^2 (-\nu \Delta v_h + \nabla p_h - f, \nabla \xi_h) &= 0, & \forall \xi_h \in Q_h. \end{aligned}$$

Satz (A priori Abschätzung ohne Modifizierung)

Wenn v und p hinreichend regulär sind, dann gilt:

$$\begin{aligned}\|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| &\leq \frac{c}{\gamma_h} \{h^{r_v} \|\nabla^{r_v} v\| + h^{r_p+1} \|\nabla^{r_p+1} p\|\}, \\ \|v - v_h\| &\leq \frac{c}{\gamma_h} \{h^{r_v+1} \|\nabla^{r_v+1} v\| + h^{r_p+2} \|\nabla^{r_p+1} p\|\}.\end{aligned}$$

Satz (A priori Abschätzung für Stokes mit Druckstabilisierung)

Wenn v und p hinreichend regulär sind, dann gilt:

$$\begin{aligned}\|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| &\leq ch(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|), \\ \|v - v_h\| &\leq ch^2(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|).\end{aligned}$$

Satz (A priori Abschätzung ohne Modifizierung)

Wenn v und p hinreichend regulär sind, dann gilt:

$$\begin{aligned}\|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| &\leq \frac{c}{\gamma_h} \{h^{r_v} \|\nabla^{r_v} v\| + h^{r_p+1} \|\nabla^{r_p+1} p\|\}, \\ \|v - v_h\| &\leq \frac{c}{\gamma_h} \{h^{r_v+1} \|\nabla^{r_v+1} v\| + h^{r_p+2} \|\nabla^{r_p+1} p\|\}.\end{aligned}$$

Satz (A priori Abschätzung für Stokes mit Druckstabilisierung)

Wenn v und p hinreichend regulär sind, dann gilt:

$$\begin{aligned}\|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| &\leq ch(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|), \\ \|v - v_h\| &\leq ch^2(\|\nabla^2 v\| + \|\nabla p\|).\end{aligned}$$

Hypothese (A priori Abschätzung für Stokes mit konsistenter Stabilisierung)

Wenn v und p hinreichend regulär sind, dann gilt:

$$\begin{aligned}\|\nabla(v - v_h)\| + \|p - p_h\| &\leq ch^r \{c(v) + c(p)\}, \\ \|v - v_h\| &\leq ch^{r+1} \{c(v) + c(p)\}.\end{aligned}$$

NUMERISCHE RESULTATE

Beispiel: Stokes – Modellproblem

Suche $v \in C^2(\Omega)^2$ und $p \in C^1(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sodass:

$$\begin{aligned} -\nu \Delta v + \nabla p &= f, & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot v &= 0, & \text{in } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} &= \bar{v}. \end{aligned}$$

- $\Omega = (0, 1)^2$
- $\nu = 1$
- $f = (0, -4\pi^2 \cos(\pi x) \sin(\pi y))^T$

Exakte Lösung:

- $\bar{v}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ -\cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{pmatrix}$
- $\bar{p}(x, y) = 2\pi \cos(\pi x) \cos(\pi y)$

Tabelle : Q^2 - Q^1 finite Elemente – ohne Stabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	659	3.585e-04	-	1.877e-02	-	2.601e-02	-	0.02
256	2467	4.386e-05	3.03	4.561e-03	2.04	6.413e-03	2.02	0.09
1024	9539	5.452e-06	3.01	1.131e-03	2.01	1.598e-03	2.00	0.45
4096	37507	6.805e-07	3.00	2.823e-04	2.00	3.991e-04	2.00	2.68
16384	148739	8.503e-08	3.00	7.054e-05	2.00	9.975e-05	2.00	22.88
65536	592387	1.063e-08	3.00	1.763e-05	2.00	2.494e-05	2.00	218.9
262144	2364419	1.328e-09	3.00	4.408e-06	2.00	6.241e-06	2.00	2355
		Theorie:	3		2		2	

Tabelle : Q^2 - Q^1 finite Elemente – ohne Stabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	659	3.585e-04	-	1.877e-02	-	2.601e-02	-	0.02
256	2467	4.386e-05	3.03	4.561e-03	2.04	6.413e-03	2.02	0.09
1024	9539	5.452e-06	3.01	1.131e-03	2.01	1.598e-03	2.00	0.45
4096	37507	6.805e-07	3.00	2.823e-04	2.00	3.991e-04	2.00	2.68
16384	148739	8.503e-08	3.00	7.054e-05	2.00	9.975e-05	2.00	22.88
65536	592387	1.063e-08	3.00	1.763e-05	2.00	2.494e-05	2.00	218.9
262144	2364419	1.328e-09	3.00	4.408e-06	2.00	6.241e-06	2.00	2355
Theorie:			3		2		2	

Tabelle : Q^3 - Q^2 finite Elemente – ohne Stabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1539	2.041e-05	-	1.349e-03	-	1.509e-03	-	0.08
256	5891	1.353e-06	3.92	1.746e-04	2.95	1.922e-04	2.97	0.34
1024	23043	8.633e-08	3.97	2.209e-05	2.98	2.414e-05	2.99	1.72
4096	91139	5.438e-09	3.99	2.775e-06	2.99	3.021e-06	3.00	10.10
16384	362499	3.409e-10	4.00	3.476e-07	3.00	3.777e-07	3.00	65.50
65536	1445891	2.136e-11	4.00	4.349e-08	3.00	4.722e-08	3.00	472.9
Theorie:			4		3		3	

Tabelle : Q^1 - Q^1 finite Elemente – mit Druckstabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	243	4.406e-02	-	4.678e-01	-	5.904e-01	-	0.03
256	867	1.232e-02	1.84	1.979e-01	1.24	1.667e-01	1.82	0.05
1024	3267	3.175e-03	1.96	9.183e-02	1.11	4.349e-02	1.94	0.19
4096	12675	7.998e-04	1.99	4.488e-02	1.03	1.103e-02	1.98	1.01
16384	49923	2.004e-04	2.00	2.230e-02	1.01	2.772e-03	1.99	6.50
65536	198147	5.011e-05	2.00	1.114e-02	1.00	6.941e-04	2.00	43.61
262144	789507	1.253e-05	2.00	5.565e-03	1.00	1.736e-04	2.00	323.0
Theorie:			2		1		1	

Tabelle : Q^1 - Q^1 finite Elemente – mit Druckstabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	243	4.406e-02	-	4.678e-01	-	5.904e-01	-	0.03
256	867	1.232e-02	1.84	1.979e-01	1.24	1.667e-01	1.82	0.05
1024	3267	3.175e-03	1.96	9.183e-02	1.11	4.349e-02	1.94	0.19
4096	12675	7.998e-04	1.99	4.488e-02	1.03	1.103e-02	1.98	1.01
16384	49923	2.004e-04	2.00	2.230e-02	1.01	2.772e-03	1.99	6.50
65536	198147	5.011e-05	2.00	1.114e-02	1.00	6.941e-04	2.00	43.61
262144	789507	1.253e-05	2.00	5.565e-03	1.00	1.736e-04	2.00	323.0
Theorie:			2		1		1	

Tabelle : Q^2 - Q^2 finite Elemente – mit Druckstabilisierung.

cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	867	4.015e-02	-	2.936e-01	-	5.491e-01	-	0.06
256	3267	1.152e-02	1.80	8.533e-02	1.78	1.625e-01	1.76	0.27
1024	12675	2.994e-03	1.94	2.238e-02	1.93	4.310e-02	1.91	1.18
4096	49923	7.561e-04	1.99	5.678e-03	1.98	1.100e-02	1.97	5.54
16384	198147	1.895e-04	2.00	1.426e-03	1.99	2.768e-03	1.99	28.79
65536	789507	4.741e-05	2.00	3.569e-04	2.00	6.934e-04	2.00	200.6
Theorie:			2		1		1	

Tabelle : Q^1 - Q^1 finite Elemente – mit Druckstabilisierung und Gitterstörung.

cells	dof	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\delta = 0.01h$	$\delta = 0.1h$	$\delta = 0.2h$
64	243	5.904e-01	-			
256	867	1.667e-01	1.82			
1024	3267	4.349e-02	1.94			
4096	12675	1.103e-02	1.98			
16384	49923	2.772e-03	1.99			
65536	198147	6.941e-04	2.00			
Theorie:			1			

Tabelle : Q^2 - Q^2 finite Elemente – mit Druckstabilisierung und Gitterstörung.

cells	dof	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\delta = 0.01h$	$\delta = 0.1h$	$\delta = 0.2h$
64	243	5.491e-01	-			
256	867	1.625e-01	1.76			
1024	3267	4.310e-02	1.91			
4096	12675	1.100e-02	1.97			
16384	49923	2.768e-03	1.99			
65536	198147	6.934e-04	2.00			
Theorie:			1			

Tabelle : Q^1 - Q^1 finite Elemente – mit Druckstabilisierung und Gitterstörung.

cells	dof	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\delta = 0.01h$	$\delta = 0.1h$	$\delta = 0.2h$
64	243	5.904e-01	-	-	-	-
256	867	1.667e-01	1.82	1.82	1.76	1.68
1024	3267	4.349e-02	1.94	1.93	1.88	1.81
4096	12675	1.103e-02	1.98	1.98	1.91	1.81
16384	49923	2.772e-03	1.99	1.99	1.84	1.66
65536	198147	6.941e-04	2.00	1.99	1.60	1.36
Theorie:			1			

Tabelle : Q^2 - Q^2 finite Elemente – mit Druckstabilisierung und Gitterstörung.

cells	dof	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\delta = 0.01h$	$\delta = 0.1h$	$\delta = 0.2h$
64	243	5.491e-01	-			
256	867	1.625e-01	1.76			
1024	3267	4.310e-02	1.91			
4096	12675	1.100e-02	1.97			
16384	49923	2.768e-03	1.99			
65536	198147	6.934e-04	2.00			
Theorie:			1			

Tabelle : Q^1 - Q^1 finite Elemente – mit Druckstabilisierung und Gitterstörung.

cells	dof	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\delta = 0.01h$	$\delta = 0.1h$	$\delta = 0.2h$
64	243	5.904e-01	-	-	-	-
256	867	1.667e-01	1.82	1.82	1.76	1.68
1024	3267	4.349e-02	1.94	1.93	1.88	1.81
4096	12675	1.103e-02	1.98	1.98	1.91	1.81
16384	49923	2.772e-03	1.99	1.99	1.84	1.66
65536	198147	6.941e-04	2.00	1.99	1.60	1.36
Theorie:			1			

Tabelle : Q^2 - Q^2 finite Elemente – mit Druckstabilisierung und Gitterstörung.

cells	dof	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\delta = 0.01h$	$\delta = 0.1h$	$\delta = 0.2h$
64	243	5.491e-01	-	-	-	-
256	867	1.625e-01	1.76	1.75	1.70	1.62
1024	3267	4.310e-02	1.91	1.91	1.86	1.80
4096	12675	1.100e-02	1.97	1.97	1.92	1.84
16384	49923	2.768e-03	1.99	1.99	1.88	1.74
65536	198147	6.934e-04	2.00	1.99	1.71	1.47
Theorie:			1			

Tabelle : Q^2 - Q^1 finite Elemente – ohne Stabilisierung und mit Gitterstörung.

cells	dof	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\delta = 0.01h$	$\delta = 0.1h$	$\delta = 0.2h$
64	243	2.601e-02	-			
256	867	6.413e-03	2.02			
1024	3267	1.598e-03	2.00			
4096	12675	3.991e-04	2.00			
16384	49923	9.975e-05	2.00			
65536	198147	2.494e-05	2.00			
Theorie:			2			

Tabelle : Q^2 - Q^2 finite Elemente – mit konsistenter Stabilisierung und Gitterstörung.

cells	dof	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\delta = 0.01h$	$\delta = 0.1h$	$\delta = 0.2h$
64	243	1.235e-02	-			
256	867	2.961e-03	2.06			
1024	3267	7.335e-04	2.01			
4096	12675	1.830e-04	2.00			
16384	49923	4.572e-05	2.00			
65536	198147	1.143e-05	2.00			
Theorie:			2			

Tabelle : Q^2 - Q^1 finite Elemente – ohne Stabilisierung und mit Gitterstörung.

cells	dof	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\delta = 0.01h$	$\delta = 0.1h$	$\delta = 0.2h$
64	243	2.601e-02	-	-	-	-
256	867	6.413e-03	2.02	2.02	1.99	1.91
1024	3267	1.598e-03	2.00	2.00	1.98	1.91
4096	12675	3.991e-04	2.00	2.00	1.98	1.92
16384	49923	9.975e-05	2.00	2.00	1.98	1.94
65536	198147	2.494e-05	2.00	2.00	1.99	1.95
Theorie:			2			

Tabelle : Q^2 - Q^2 finite Elemente – mit konsistenter Stabilisierung und Gitterstörung.

cells	dof	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\delta = 0.01h$	$\delta = 0.1h$	$\delta = 0.2h$
64	243	1.235e-02	-			
256	867	2.961e-03	2.06			
1024	3267	7.335e-04	2.01			
4096	12675	1.830e-04	2.00			
16384	49923	4.572e-05	2.00			
65536	198147	1.143e-05	2.00			
Theorie:			2			

Tabelle : Q^2 - Q^1 finite Elemente – ohne Stabilisierung und mit Gitterstörung.

cells	dof	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\delta = 0.01h$	$\delta = 0.1h$	$\delta = 0.2h$
64	243	2.601e-02	-	-	-	-
256	867	6.413e-03	2.02	2.02	1.99	1.91
1024	3267	1.598e-03	2.00	2.00	1.98	1.91
4096	12675	3.991e-04	2.00	2.00	1.98	1.92
16384	49923	9.975e-05	2.00	2.00	1.98	1.94
65536	198147	2.494e-05	2.00	2.00	1.99	1.95
Theorie:			2			

Tabelle : Q^2 - Q^2 finite Elemente – mit konsistenter Stabilisierung und Gitterstörung.

cells	dof	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\delta = 0.01h$	$\delta = 0.1h$	$\delta = 0.2h$
64	243	1.235e-02	-	-	-	-
256	867	2.961e-03	2.06	2.06	2.01	1.90
1024	3267	7.335e-04	2.01	2.01	1.98	1.91
4096	12675	1.830e-04	2.00	2.00	1.97	1.90
16384	49923	4.572e-05	2.00	2.00	1.98	1.92
65536	198147	1.143e-05	2.00	2.00	1.98	1.92
Theorie:			2			

Tabelle : Q^2 - Q^2 finite Elemente – mit konsistenter Stabilisierung.

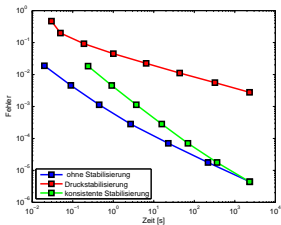
cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	867	3.746e-04	-	1.835e-02	-	1.235e-02	-	0.24
256	3267	4.445e-05	3.07	4.532e-03	2.02	2.961e-03	2.06	0.92
1024	12675	5.472e-06	3.02	1.130e-03	2.00	7.335e-04	2.01	3.71
4096	49923	6.811e-07	3.01	2.822e-04	2.00	1.830e-04	2.00	15.8
16384	198147	8.505e-08	3.00	7.053e-05	2.00	4.572e-05	2.00	69.91
65536	789507	1.063e-08	3.00	1.763e-05	2.00	1.143e-05	2.00	365.0
262144	3151875	1.328e-09	3.00	4.408e-06	2.00	2.857e-06	2.00	2326
		Theorie:	3		2		2	

Tabelle : Q^2 - Q^2 finite Elemente – mit konsistenter Stabilisierung.

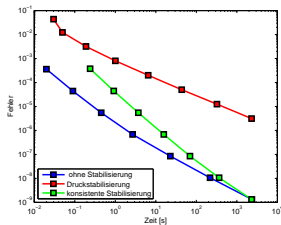
cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	867	3.746e-04	-	1.835e-02	-	1.235e-02	-	0.24
256	3267	4.445e-05	3.07	4.532e-03	2.02	2.961e-03	2.06	0.92
1024	12675	5.472e-06	3.02	1.130e-03	2.00	7.335e-04	2.01	3.71
4096	49923	6.811e-07	3.01	2.822e-04	2.00	1.830e-04	2.00	15.8
16384	198147	8.505e-08	3.00	7.053e-05	2.00	4.572e-05	2.00	69.91
65536	789507	1.063e-08	3.00	1.763e-05	2.00	1.143e-05	2.00	365.0
262144	3151875	1.328e-09	3.00	4.408e-06	2.00	2.857e-06	2.00	2326
Theorie:			3		2		2	

Tabelle : Q^3 - Q^3 finite Elemente – mit konsistenter Stabilisierung.

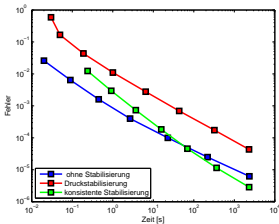
cells	dof	$\ v - v_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ \nabla(v - v_h)\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	$\ p - p_h\ $	$\mathcal{O}(h^k)$	time [s]
64	1875	1.828e-05	-	9.513e-04	-	8.737e-04	-	1.10
256	7203	1.016e-06	4.17	1.091e-04	3.12	9.495e-05	3.20	4.33
1024	28227	6.080e-08	4.06	1.317e-05	3.05	1.116e-05	3.09	17.55
4096	111747	3.757e-09	4.02	1.630e-06	3.01	1.364e-06	3.03	74.10
16384	444675	2.477e-10	3.92	2.139e-07	2.93	1.818e-07	2.91	340.4
65536	1774083	8.302e-11	1.58	1.379e-07	0.63	1.372e-07	0.41	1805
Theorie:			4		3		3	



(e) $\|\nabla(v - v_h)\|$



(f) $\|v - v_h\|$

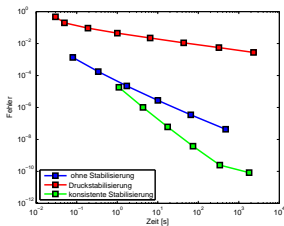


(g) $\|p - p_h\|$

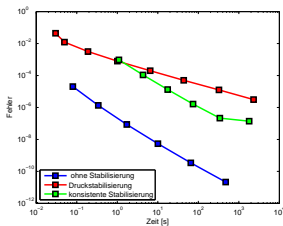
Q^2-Q^1 (oS)

Q^1-Q^1 (DS)

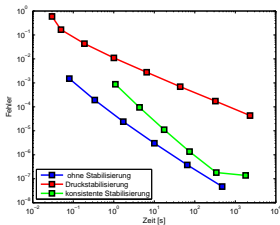
Q^2-Q^2 (kS)



(h) $\|\nabla(v - v_h)\|$



(i) $\|v - v_h\|$



(j) $\|p - p_h\|$

AUSBLICK

- komplizierteres Modellproblem
- adaptive Verfeinerung
- Iterative Löser
- Viskosität ν
- Stabilisierungsparameter α