Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
2014

Seminarvortrag

Der Satz von Hardy

Chris Kowall
Mathematik (BSc)
C.Kowall@stud.uni-heidelberg.de
Matr.-Nr. 2775510

Philipp Siehr
Mathematik (BSc)
P.Siehr@stud.uni-heidelberg.de
Matr.-Nr. 2772186

betreut von
Dr. Rolf Busam

Datum des Vortrags: 13. und 20. Oktober 2014

1 Einleitung

Bereits im Jahre 1859 bewies Bernhard RIEMANN, dass alle nicht-trivialen Nullstellen der meromorphen Fortsetzung der RIEMANNschen ζ-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s = \sigma + \mathrm{i}t, \qquad \sigma > 1, \tag{1.1}$$

auf dem kritischen Streifen $S_{\text{krit}} = \{s \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \sigma \leqslant 1\}$ liegen. Die RIEMANNsche Vermutung basiert auf diesem Beweis und lautet:
Alle nicht-trivialen Nullstellen der RIEMANN*schen ζ-Funktion liegen auf der kritischen Geraden $G_{\text{krit}} = \{s \in \mathbb{C} : \sigma = \frac{1}{2}\}$.*

Bisher konnte diese berühmte Aussage noch nicht bewiesen oder widerlegt werden. Insbesondere wurde der Beweis der Vermutung im Jahr 2000 als das sechste „Milleniumsproblem“ bekannt gegeben.
Mithilfe der Formel von RIEMANN-VON MANGOLDT wurde im ersten Seminarvortrag gezeigt, dass unendlich viele Nullstellen in S_{krit} existieren.

Dieser Seminarvortrag basiert auf [2] und führt einen Beweis des Satzes von HARDY. Dieser besagt, dass sich unendlich viele nicht-triviale Nullstellen bereits auf G_{krit} befinden.
Die dort geführten Argumente werden ausformuliert und fehlende Beweise ergänzt. Dem einschlägigen Leser sei empfohlen, die Seiten bis Abschnitt 2 zu überspringen, da diese nur die notwendigen Hilfsmittel bereitstellen, aber nicht zum tieferen Verständnis beitragen.
Neben [2] basiert der Vortrag auf der Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ [1] aus dem Sommersemester 2014. Die in diesem Vortrag wichtigen Resultate werden im folgenden Abschnitt zusammengefasst.

1.1 Hilfsmittel für die Lemmata nach Chandrasekharan

Der Beweis des Satzes von HARDY benötigt einige Vorabeit. Die folgenden Lemmata haben im einzelnen keine größere Bedeutung, stellen aber wichtige Hilfsmittel für den nachfolgenden Abschnitt. Daher werden wir an dieser Stelle nicht weiter auf die einzelnen Aussagen eingehen.

Definition 1.1
Sei $s \in \mathbb{C}$ und folgende komplexwertige Funktion definiert:

$$\eta(s) = \zeta(s)\Gamma(\tfrac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}, \ \textit{mit}\ s \notin \{0, 1\}.$$

Bemerkung: In diesem Seminarvortrag werden nicht die Bezeichnungen aus der Vorlesung, sondern aus dem Buch [2] verwendet. Die ξ-Funktion aus der Vorlesung wird daher mit η bezeichnet. Des Weiteren ist η eine meromorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ mit Polstellen 1. Ordnung für $s \in \{0, 1\}$.

Satz 1.2 (Ergänzungssatz)
Mit obiger Definition gilt für entsprechendes $s \in \mathbb{C}$:

i) $\eta(s) = \eta(1-s)$.

ii) *Für $t \in \mathbb{R}$ ist $\eta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right) \in \mathbb{R}$.*

Beweis.

i) Diese Aussage wurde in der Vorlesung [1] bewiesen.

ii) Die Aussage für η wurde auf Übungsblatt 10 der Vorlesung [1] bewiesen.

□

Satz 1.3 (2. Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in [a, b]$, sodass:

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

Bemerkung: Der Beweis des 2. Mittelwertsatzes kann in [3] nachgeschlagen werden. Im Folgenden werden wir den Satz auf stetige Funktionen g anwenden, die der schwächeren Eigenschaft Riemann-integrierbar genügen.

Lemma 1.4
Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion und $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$:

i) $|g(s)| = |\overline{g(s)}|$.

ii) $h(\overline{s}) = \overline{h(s)}$.

Beweis.

i) Sei $s = \sigma + \mathrm{i}t$, dann gibt es per Definition relle Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(s) = u(\sigma, t) + \mathrm{i}v(\sigma, t).$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned} |g(s)|^2 &= (u(\sigma,t))^2 + (v(\sigma,t))^2 \\ &= (u(\sigma,t))^2 + (u(\sigma,t))^2 \\ &= |\overline{g(s)}|^2. \end{aligned}$$

ii) Als ganze Funktion lässt sich h zu einem beliebigen Punkt s_0 in einer TAYLOR-Entwicklung darstellen. Mit $s_0 = 0$ ergibt sich:

$$h(s) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} s^k.$$

Die Holomorphie ergibt mit $h^{(k)}(0) = \lim_{\tau\to 0} \frac{h^{(k-1)}(\tau)-h^{(k-1)}(0)}{\tau}$ induktiv $h^{(k)}(0) \in \mathbb{R}$. Denn es ist $h(0) \in \mathbb{R}$ und die Limiten existieren, sodass h so gewählt werden kann, dass auch der Limes reell ist. Damit folgt:

$$\begin{aligned} h(\overline{s}) &= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \overline{s}^k \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \overline{\frac{h^{(k)}(0)}{k!} s^k} = \overline{h(s)}. \end{aligned}$$

□

1.2 Hilfssätze nach Chandrasekharan

Lemma 1.5
Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $f \in C^1[a,b]$ mit f' monoton wachsend oder fallend. Es existiere $m \in \mathbb{R}$, sodass $|f'(x)| \geqslant m > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt die Abschätzung:

$$\left| \int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i} f(x)} \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{8}{m}. \tag{1.3}$$

Beweis. Dieser Beweis verwendet eine schwächere Version des 2. Mittelwertsatzes als in Vergleich zu [2].
Mit Hilfe der EULERschen Formel und der Dreiecksungleichung gilt zunächst:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i} f(x)} \mathrm{d}x \right| &= \left| \int_a^b \cos(f(x)) + \mathrm{i} \sin(f(x)) \mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \left| \int_a^b \cos(f(x)) \mathrm{d}x \right| + \left| \int_a^b \sin(f(x)) \mathrm{d}x \right|. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Im Folgenden wird nun der erste Summand von (1.4) genauer betrachtet. Die Abschätzung für den zweiten Summanden erfolgt analog. Es gilt mit Satz 1.3:

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos(f(x)) \mathrm{d}x &= \int_a^b (f'(x))^{-1} f'(x) \cos(f(x)) \mathrm{d}x \\ &= (f'(a))^{-1} \int_a^\xi f'(x) \cos(f(x)) \mathrm{d}x + (f'(b))^{-1} \int_\xi^b f'(x) \cos(f(x)) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen des 2. Mittelwertsatzes sind dabei erfüllt, da f' monoton und somit auch $(f')^{-1}$ monoton ist. Des Weiteren ist die Abbildung $x \mapsto f'(x)\cos(f(x))$ RIEMANN-integrierbar.
Verwendet man nun die Identität $f'(x)\cos(f(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(f(x))$ folgt mit dem Hauptsatz der Differentialrechnung und $\xi \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \cos(f(x))\mathrm{d}x\right| &= \left|f'(a)^{-1}\sin(f(x))\Big|_a^\xi + f'(b)^{-1}\sin(f(x))\Big|_\xi^b\right| \\ &\leqslant \left|f'(a)^{-1}\right| \cdot \left|\sin(f(x))\Big|_a^\xi\right| + \left|f'(b)^{-1}\right| \cdot \left|\sin(f(x))\Big|_\xi^b\right| \\ &\leqslant \frac{2}{m} + \frac{2}{m} = \frac{4}{m}.\end{aligned}$$

Hierbei wurden im letzten Schritt die Voraussetzung $|f'(x)^{-1}| \leqslant \frac{1}{m}$ angewandt.
Die gleiche Abschätzung ergibt sich auch für den zweiten Summanden von (1.4) mit analogem Vorgehen unter Verwendung der Identität $f'(x)\sin(f(x)) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(f(x))$. Fügt man beide Ergebnisse in (1.4) zusammen, ergibt sich die gewünschte Abschätzung:

$$\left|\int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{4}{m} + \frac{4}{m} = \frac{8}{m}. \tag{1.5}$$

□

Lemma 1.6
Sei $f, g \in C^2([a,b])$. Die Funktion $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f'}{g}\right)$ besitze höchstens q verschiedene Nullstellen $x_i \in [a,b]$, $i = 1, \dots q$. Sei weiter $g(x) \neq 0$, sowie $\left|\frac{f'(x)}{g(x)}\right| \geqslant m > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt:

$$\left|\int_a^b g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{8(q+1)}{m}. \tag{1.6}$$

Beweis. Zunächst wird das Intervall $I = [a,b]$ in $q+1$ Teilintervalle zerlegt. Dabei seien o.E. a und b keine der q Nullstellen. Wären a oder b eine Nullstelle, so verbessert sich die Abschätzung auf den Faktor q, sind beide Intervallgrenzen Nullstellen, dann sogar auf $q-1$. Wir benennen $x_0 = a$ und $x_{q+1} = b$ und definieren Teilintervalle $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ mit $i = 0, \dots q$. Mit diesen Bezeichnungen lässt sich I wie folgt zerlegen:

$$I = \bigcup_{i=0}^q I_i.$$

Auf jedem dieser Teilintervalle ist $\frac{g}{f'}$ entweder monoton wachsend oder fallend, denn nach Voraussetzung besitzt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f'}{g}\right)$ dort keine Nullstelle. Diese Voraussetzung geht in den nachfolgenden 2. Mittelwertsatz ein. Auf jedem Teilintervall wird nun der Beweis analog zu dem Beweis von Lemma 1.5 geführt. Dabei sei o.B.d.A $\frac{f'(x)}{g(x)} \geqslant m > 0$. Es gilt nun:

$$\left|\int_{I_i} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{I_i} g(x)\cos(f(x))\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{I_i} g(x)\sin(f(x))\mathrm{d}x\right|. \tag{1.7}$$

Für den ersten Summanden von (1.7) gilt mit dem 2. Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{I_i} g(x)\cos(f(x))\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{I_i} \frac{g(x)}{f'(x)} f'(x)\cos(f(x))\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\frac{g(a)}{f'(a)}\int_{x_i}^{\xi_i} f'(x)\cos(f(x))\mathrm{d}x + \frac{g(b)}{f'(b)}\int_{\xi_i}^{x_{i+1}} f'(x)\cos(f(x))\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \left|\frac{g(a)}{f'(a)}\sin(f(x))\Big|_{x_i}^{\xi_i}\right| + \left|\frac{g(a)}{f'(a)}\sin(f(x))\Big|_{\xi_i}^{x_{i+1}}\right| \\
&= \frac{2}{m} + \frac{2}{m} = \frac{4}{m}.
\end{aligned}
$$

Zusammenfassend ergibt sich für das gesamte Intervall direkt die Behauptung:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_I g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| &\leqslant \sum_{i=0}^{q}\left|\int_{I_i} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{q}\left(\frac{4}{m}+\frac{4}{m}\right) = \frac{8(q+1)}{m}.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 1.7
Sei $f \in C^2[a,b]$ und $|f''(x)| \geqslant r > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt:

$$\left|\int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{16}{\sqrt{r}}. \tag{1.8}$$

Beweis. Bedingt durch die Stetigkeit der zweiten Ableitung von f und durch die Voraussetzung $|f''(x)| \geqslant r > 0$ ist ein Vorzeichenwechsel von f'' ausgeschlossen. Daher sei o.B.d.A $f''(x) \geqslant r > 0$.
Nach dieser Aussage ist f' streng monoton wachsend und hat daher höchstens eine Nullstelle in $[a,b]$. Wir betrachten die drei möglichen Fälle einzeln.

i) Es gibt ein $c \in [a,b]$ mit $f'(c) = 0$.
Aufgrund der Monotonie ist $f'(x) < 0$ für $x < c$ und $f'(x) > 0$ für $x > c$. Um Lemma 1.5 anwenden zu können, benötigen wir jedoch die gleichmäßige Beschränktheit von f'. Sei daher $\delta > 0$ gewählt und die folgenden Intervalle mit $I = [a,b] = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ definiert.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \begin{cases} [a, c-\delta], & c-\delta > a, \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases} \\
I_2 &= [c-\delta, c+\delta] \cap I. \\
I_3 &= \begin{cases} [c+\delta, b], & c+\delta < b, \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Diese Intervalle können gegebenenfalls, z.B. wenn $c = a$ ist oder δ zu groß ist, leer sein. Dies würde die Abschätzung jedoch nur verbessern.

I_2: Es gilt direkt die Abschätzung:

$$\left|\int_{I_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{I_2} \underbrace{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\right|}_{=1} \mathrm{d}x = \int_{c-\delta}^{c+\delta} \chi[I_2] \cdot 1 \, \mathrm{d}x \leqslant 2\delta. \tag{1.9}$$

Dabei ist $\chi[I_2]$ die charakteristische Funktion auf I_2.

I_1: Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:

$$-f'(x) = \int_x^c f''(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x} \geqslant r(c-x) \geqslant r\delta > 0.$$

Dabei ist $(c-x) \geqslant \delta$, da $x \in I_1$, d.h. $x \leqslant c - \delta$. Wie oben bereits beobachtet ist f' monoton und somit Lemma 1.5 mit $m = r\delta$ anwendbar. Es ergibt sich die Abschätzung:

$$\left|\int_{I_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{8}{r\delta}. \tag{1.10}$$

I_3: Analog zu I_1 gilt:

$$f'(x) = \int_c^x f''(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x} \geqslant r(x-c) \geqslant r\delta.$$

Auch in I_3 ist f' monoton, und daher folgt erneut mit Lemma 1.5:

$$\left|\int_{I_3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{8}{r\delta}. \tag{1.11}$$

Fassen wir die Zwischenergebnisse (1.9), (1.10) und (1.11) zusammen und wählen $\delta = \frac{2}{\sqrt{r}}$ ergibt sich die Behauptung.

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| &\leqslant \sum_{j=1}^{3} \left|\int_{I_j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \frac{16}{r\delta} + 2\delta \\
&< 2 \cdot \left(\frac{8}{r\delta} + 2\delta\right) = \frac{16}{\sqrt{r}}.
\end{aligned}$$

ii) $f' > 0$ in $[a, b]$.
Der Beweis verläuft analog zu *i*). Da f' monoton wächst, gibt es nur die problematische Stelle $x = a$, in der die gleichmäßige Beschränktheit nicht gesichert ist.

Wir setzen daher $c = a$ und δ entsprechend. Es ergeben sich die Intervalle:

$$\begin{aligned} I_1 &= \emptyset, \\ I_2 &= [a, a+\delta] \cap I, \\ I_3 &= \begin{cases} [a+\delta, b], & a+\delta < b \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Anschließend können die Beweisschritte von *i*) direkt übernommen werden.

iii) $f' < 0$ in $[a, b]$.
Analog zu *ii*) wird $c = b$ gewählt und die Beweismethoden von *i*) auf die folgenden Intervalle angewandt.

$$\begin{aligned} I_1 &= \begin{cases} [a, b-\delta], & a < b-\delta \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases} \\ I_2 &= [b-\delta, b] \cap I, \\ I_3 &= \emptyset. \end{aligned}$$

Fasst man alle drei Fälle zusammen, ist der Beweis vollendet. □

Lemma 1.8
Seien $f, g \in C^2[a, b]$ *und* $|f''(x)| \geqslant r > 0$ *sowie* $|g(x)| \leqslant M$ *für* $x \in [a, b]$. *Sei weiter* $g \neq 0$ *und* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f'}{g}\right)$ *besitze höchstens* q *verschiedene Nullstellen in* $[a, b]$. *Dann gilt:*

$$\left| \int_a^b g(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)} \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{16M(q+1)}{\sqrt{r}}. \tag{1.12}$$

Bemerkung: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 1.7. Mit * gekennzeichnete Abschätzungen sind dort im Detail ausgeführt. Die einzige nennenswerte Änderung beruht in der Anwendung von Lemma 1.6 anstelle von Lemma 1.5.

Beweis. O.B.d.A sei erneut $f''(x) \geqslant r > 0$ für alle $x \in [a, b]$.
Im Folgenden ist der Beweis für den Fall, dass f' die Nullstelle $c \in [a, b]$ besitzt geschildert. Die Fälle $f' < 0$ und $f' > 0$ verlaufen analog zu diesem, mit der gleichen Überlegung wie im Beweis zu Lemma 1.7.
Sei daher ein $c \in [a, b]$ gegeben mit $f'(c) = 0$. Sei $\delta > 0$ und die drei Intervalle mit $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ exakt wie zuvor definiert:

$$\begin{aligned} I_1 &= \begin{cases} [a, c-\delta], & c-\delta > a, \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases} \\ I_2 &= [c-\delta, c+\delta] \cap I. \\ I_3 &= \begin{cases} [c+\delta, b], & c+\delta < b, \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Auch hier liefert ein leeres Intervall nur eine Verbesserung der Abschätzungen. Die einzelnen Beträge sind wie folgt:

I_2: Es gilt direkt die Abschätzung:

$$\left|\int_{I_2} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{I_2} |g(x)||\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}|\mathrm{d}x \leqslant M \int_{I_2} |\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}|\mathrm{d}x \overset{*}{\leqslant} 2M\delta. \tag{1.13}$$

I_1: Um Lemma 1.6 anwenden zu können, ist die Abschätzung $\left|\frac{f'(x)}{g(x)}\right| \geqslant m > 0$ notwendig. In I_1 gilt $f'(x) < 0$, da $x < c$. Nach Voraussetzung ist entweder $g > 0$ oder $g < 0$. Sei zunächst $g > 0$, dann gilt direkt mit dem Haupsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$-\frac{f'(x)}{g(x)} \geqslant \frac{1}{M}(-f'(x)) \overset{*}{\geqslant} \frac{r\delta}{M} > 0.$$

In der ersten Abschätzung wurde verwendet, dass $-f'(x) > 0$ ist und daher mit $g(x) < M$ der Nenner vergrößert wurde. Sei nun $g < 0$, dann gilt:

$$\frac{f'(x)}{g(x)} \geqslant \frac{1}{M}(f'(x)) \overset{*}{\geqslant} \frac{r\delta}{M} > 0.$$

In beiden Fällen sind die Voraussetzungen von Lemma 1.6 mit $m = \dfrac{r\delta}{M}$ efüllt. Es folgt die Abschätzung:

$$\left|\int_{I_1} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{8M(q+1)}{r\delta}. \tag{1.14}$$

I_3: Mit analoger Vorgehensweise und Fallunterscheidung wie bei I_1 gilt:

$$\pm\frac{f'(x)}{g(x)} \geqslant \frac{1}{M}(f'(x)) \overset{*}{\geqslant} \frac{r\delta}{M} > 0.$$

Erneute Anwendung von Lemma 1.6 liefert:

$$\left|\int_{I_1} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{8M(q+1)}{r\delta}. \tag{1.15}$$

Zusammenfassend ergibt sich mit der Wahl $\delta = \frac{2}{\sqrt{r}}$ die Behauptung:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}\mathrm{d}x\right| &\leqslant \frac{16M(q+1)}{r\delta} + 2M\delta \\ &\leqslant \frac{16M(q+1)}{r\delta} + 2M(q+1)\delta \\ &\leqslant 2M(q+1)\left[\frac{8}{r\delta} + 2\delta\right] \\ &\leqslant \frac{16M(q+1)}{\sqrt{r}}.\end{aligned}$$

□

2 Der Satz von Hardy

Die Aussage der Satzes von Hardy lässt sich in wenigen Worten formulieren. Der anschließende Beweis verdeutlicht, dass diese Aussage im höchsten Grade nicht trivial ist.

Satz 2.9 (Hardy)
Es gibt unendlich viele Nullstellen der Riemann*schen ζ-Funktion mit Realteil $\frac{1}{2}$.*

Beweis. Dieser Beweis orientiert sich an den Ideen von Hardy und Littlewood.
Im folgenden Beweis bezeichne s immer eine komplexe Zahl und t eine reelle Zahl, wie in [2].
Mit Satz 1.2 ist bereits bekannt, dass $\eta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)$ ausschließlich reelle Werte annimmt und per Definition 1.1 über

$$\eta\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)}{\pi^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t}} \tag{2.1}$$

mit den Werten der ζ-Funktion auf der kritischen Geraden zusammenhängt.
Sei nun die dementsprechend *reellwertige* Funktion

$$Z(t)=\frac{\eta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\cdot\pi^{\frac{1}{4}}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)\right|} \tag{2.2}$$

definiert, mit

$$|Z(t)|=\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right|. \tag{2.3}$$

Nun ist unter Verwendung der positiven Wurzel

$$\begin{aligned}
Z(t)&=\pi^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}t}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)\right|}\zeta\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\\
&=\pi^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}t}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)^2}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}}\zeta\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\\
&=\pi^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}t}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)^2}{\overline{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\zeta\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\\
&=\pi^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}t}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)}{\overline{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)}}\right]^{\frac{1}{2}}\zeta\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\\
&=\pi^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}t}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t\right)}\right]^{-\frac{1}{2}}\zeta\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\\
&=\pi^{-\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right]-\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right]\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right]\right)}\right]^{-\frac{1}{2}}\zeta\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\\
&=:\left(\chi\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\zeta\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t\right).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Hier wurde der Übersicht halber die Funktion χ mit

$$\chi(s) := \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \cdot \pi^{s-\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

eingeführt.

Diese Vorabeit beschreibt, dass Z in $\mathbb{R}$ das gleiche Nullstellenverhalten wie ζ auf der kritischen Gerade besitzt. Sofern ζ nur eine endliche Anzahl von Nullstellen mit Realteil $\frac{1}{2}$ besitzen würde, dann gäbe es ein T_0, sodass für $T > T_0$ die Funktion Z strikt positiv oder negativ wäre. Damit müsste die folgende Identität erfüllt sein.

$$\left| \int_T^{2T} Z(t) \mathrm{d}t \right| = \int_T^{2T} |Z(t)| \, \mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

Das Ziel wird es sein, das Gegenteil dieser Aussage zu beweisen.

a) Sei dazu der Integrationsweg $\gamma = \bigcup_{i=1}^4 \gamma_i$ wie in Abbildung 1 gegeben.

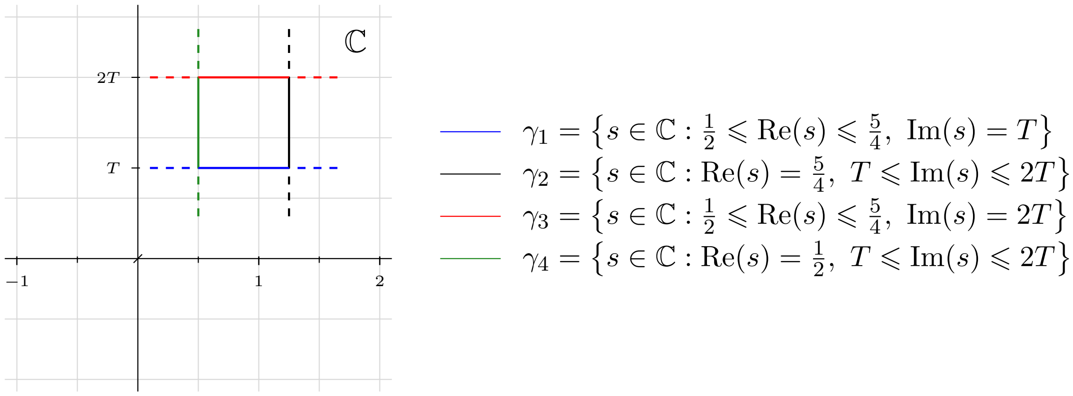

Abbildung 1: Integrationspfad γ.

Nach dem CAUCHYschen Integralsatz gilt auf diesem Pfad

$$\mathrm{i} \int_T^{2T} Z(t) \mathrm{d}t = \int_{\gamma_4} \chi(s)^{-\frac{1}{2}} \zeta(s) \mathrm{d}s = -\sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} \chi(s)^{-\frac{1}{2}} \zeta(s) \mathrm{d}s. \tag{2.7}$$

Dies folgt mit der Parametrisierung $\varphi(t) = \frac{1}{2} + \mathrm{i}t$, sowie $\varphi'(t) = \mathrm{i}$ auf dem Pfad γ_4:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_4} \chi(s)^{-\frac{1}{2}} \zeta(s) \mathrm{d}s &= \int_T^{2T} \chi\left(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)^{-\frac{1}{2}} \zeta\left(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}t\right) \varphi'(t) \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{i} \int_T^{2T} Z(t) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nach dieser Überlegung werden im Folgenden die Integrale über γ_1, γ_2 und γ_3 betrachtet. Hierfür benutzt man die Formel von STIRLING, wie beispielsweise in [4]. Für $s = \sigma + it$ gilt

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} \cdot \exp\left(\left(s - \frac{1}{2} \right) \cdot \mathrm{Log}(s) \right) \cdot \mathrm{e}^{-s} \cdot \mathrm{e}^{\mu(s)} \tag{2.9}$$

mit der GUDERMANNschen Reihe μ. Für $t \to \infty$ ist des Weiteren $\operatorname{Arg}(s) = \frac{\pi}{2}$ und $|s| = t$, sodass Γ das asymptotische Verhalten

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} \cdot \exp\left(\left(s - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\log t + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \mathrm{e}^{-s} \cdot \mathrm{e}^{\mu(s)} \tag{2.10}$$

besitzt. In der Funktionentheorie, siehe [4, S. 55 ff.], wurde bereits gezeigt, dass μ auf einem festen Streifen, wie etwa $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \frac{5}{4}$, beschränkt ist. Genauer zeigt man aber (siehe [4], S. 58 ff.):

$$\mu(s) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{für} \quad t \to \infty. \tag{2.11}$$

Mithilfe einer TAYLOR-Entwicklung erhält man

$$\mathrm{e}^{\mu(s)} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right), \quad \text{für} \quad t \to \infty,$$

was die Abschätzung

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} \cdot t^{s-\frac{1}{2}} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right) - s\right) \cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\right) \tag{2.12}$$

impliziert.
Damit folgt für große t die Abschätzung

$$\begin{aligned}
(\chi(s))^{-\frac{1}{2}} &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{4}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s)\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{4}} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\right)} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}(s-1+s)\right)} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}(1-s)\right)} \cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\right) \\
&= \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\left(s-\frac{1}{2}\right)} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}} \cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\right) \\
&= \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{i}t} \cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\right).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Auch hier wurde erneut die positive Wurzel verwendet, da das Vorzeichen keine Relevanz in diesem Beweis besitzt. Die Integration durch Substitution über den Pfad γ_2 liefert

$$\int_{\gamma_2} (\chi(s))^{-\frac{1}{2}} \zeta(s) \,\mathrm{d}s = \mathrm{i} \int_T^{2T} \left(\chi\left(\frac{5}{4} + \mathrm{i}t\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \zeta\left(\frac{5}{4} + \mathrm{i}t\right) \,\mathrm{d}t, \tag{2.14}$$

wobei nach vorigen Überlegungen gilt:

$$\left(\chi\left(\frac{5}{4} + \mathrm{i}t\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}t} \cdot \left[C + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\right] \tag{2.15}$$

mit der Konstanten $C := \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\right)=\exp\left(\frac{3}{16}\left(\mathrm{i}\pi-2\right)\right)$.
Mit der absolut gleichmäßigen Konvergenz der ζ-Funktion für $T \leqslant t \leqslant 2T$ ergibt sich daraus

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} (\chi(s))^{-\frac{1}{2}} \zeta(s)\, \mathrm{d}s &= \mathrm{i} \int_T^{2T} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\mathrm{i}t} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}t} \cdot \left[C + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\right] \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}+\mathrm{i}t}}\, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-\frac{5}{4}} \int_T^{2T} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{3}{8}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}t\log\left(\frac{t}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{i}t-\mathrm{i}t\log n} \left[\mathrm{i}C + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\right] \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-\frac{5}{4}} \int_T^{2T} g(t)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}f_n(t)} \cdot \left[\mathrm{i}C + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\right] \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-\frac{5}{4}} \left[\int_T^{2T} g(t)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}f_n(t)} \cdot \mathrm{i}C\mathrm{d}t + \int_T^{2T} g(t)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}f_n(t)} \cdot \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t\right] \\
&=: \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-\frac{5}{4}} \left[I_1 + I_2\right] \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

mit

$$
g(t) := \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{3}{8}} \quad \text{und} \quad 0 < g(t) \leqslant \left(\frac{T}{\pi}\right)^{\frac{3}{8}} =: M
$$

und

$$
f_n(t) := \frac{1}{2}t \cdot \left[\log\left(\frac{t}{2\pi}\right) - 1 - 2\log n\right] \quad \text{mit} \quad f_n'(t) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \log n.
$$

Zur Abschätzung von I_1 aus (2.16) wird Lemma 1.8 verwendet und mit den dortigen Bezeichnungen erhält man

$$
|I_1| = \left| C \int_T^{2T} g(t)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}f_n(t)}\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{16M(q+1)|C|}{\sqrt{r}} = \mathcal{O}\left(T^{\frac{7}{8}}\right), \qquad (2.17)
$$

denn es gilt

$$
f_n''(t) = \frac{1}{2t} \geq \frac{1}{4T} =: r > 0,
$$

sowie

$$
\left(\frac{f_n'}{g}\right)(t) = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\frac{3}{8}} \cdot \left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \log n\right]
$$

und

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{f_n'}{g}\right)(t) = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\frac{11}{8}} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \left[-\frac{3}{16}\log t + \frac{3}{8}\log n + \frac{1}{2}\right].
$$

Insbesondere ist dabei $q = 1$, da die letzte gebildete Ableitung höchstens eine Nullstelle hat ($t > 0$).
Der zweite Summand aus (2.16) lässt sich betragsmäßig schreiben als

$$
\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-\frac{5}{4}} \cdot \int_T^{2T} \mathcal{O}\left(t^{\frac{3}{8}-1}\right)\, \mathrm{d}t, \qquad (2.18)
$$

was nach einer Integration von der Ordnung $\mathcal{O}\left(T^{\frac{3}{8}}\right)$ ist.
Da die Abschätzungen (2.17) und (2.18) gleichmäßig in n gelten, folgt mit (2.16) direkt

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} (\chi(s))^{-\frac{1}{2}}\,\zeta(s)\,\mathrm{d}s &= \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-\frac{5}{4}}\,[I_1 + I_2] \\ &= \mathcal{O}\left(T^{\frac{7}{8}}\right)\cdot\zeta\left(\frac{5}{4}\right) = \mathcal{O}\left(T^{\frac{7}{8}}\right).\end{aligned} \tag{2.19}$$

Für die Integrationspfade γ_1 und γ_3 wird erneut (2.13) mit der stärkeren Abschätzung

$$(\chi(s))^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{O}\left(t^{\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{4}}\right), \tag{2.20}$$

verwendet. Beachtet man außerdem für $t \in \{T, 2T\}$ auf den Pfaden $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \frac{5}{4}$, so folgt

$$(\chi(s))^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{O}\left(T^{\frac{3}{8}}\right), \tag{2.21}$$

Nach dem im Anhang bewiesenen Lemma 3.10 ist für diese Werte von σ dann

$$(\chi(s))^{-\frac{1}{2}}\,\zeta(s) = \mathcal{O}\left(T^{\frac{3}{8}+1-\delta}\right) \tag{2.22}$$

für festes $0 < \delta < 1$. Wählt man in beiden Fällen $\delta \geq \frac{1}{2}$ fest, so sind auch diese Pfade von der Ordnung $\mathcal{O}\left(T^{\frac{7}{8}}\right)$ oder geringer.
Zusammengefasst ergeben die Erkenntnisse (2.19) und (2.22) mit dem CAUCHYschen Integralsatz aus Gleichung (2.7):

$$\left|\int_T^{2T} Z(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{\gamma_4} (\chi(s))^{-\frac{1}{2}}\,\zeta(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \sum_{i=1}^{3}\left|\int_{\gamma_i} (\chi(s))^{-\frac{1}{2}}\,\zeta(s)\,\mathrm{d}s\right| = \mathcal{O}\left(T^{\frac{7}{8}}\right). \tag{2.23}$$

b) Folglich ist noch zu widerlegen, dass das Integral über den Absolutbetrag von Z derselben Ordnung ist. Zunächst ist mit (2.3):

$$\left|\int_T^{2T} Z(t)\,\mathrm{d}t\right| \overset{*}{=} \int_T^{2T} |Z(t)|\,\mathrm{d}t = \int_T^{2T} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right|\,\mathrm{d}t \geq \left|\int_T^{2T} \zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\,\mathrm{d}t\right|, \tag{2.24}$$

wobei per Substitution gilt:

$$\int_{\gamma_4} \zeta(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{i}\int_T^{2T} \zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\,\mathrm{d}t. \tag{2.25}$$

Die mit $\overset{*}{=}$ gekennzeichnete Beziehung soll an dieser Stelle ein weiteres Mal verdeutlichen wie der Weg dieses Beweises ist. Dies ist jene Aussage von der angenommen wird, das sie gültig ist und die zu einem Widerspruch führt. Siehe dazu (2.6).

Betrachtet man nun einen weiteren Rechtecksweg $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i$ wie in Abbildung 2, dann gilt mit dem CAUCHYschen Integralsatz:

$$\int_{\Gamma_4=\gamma_4} \zeta(s)\,\mathrm{d}s = -\sum_{i=1}^{3} \int_{\Gamma_i} \zeta(s)\,\mathrm{d}s.$$

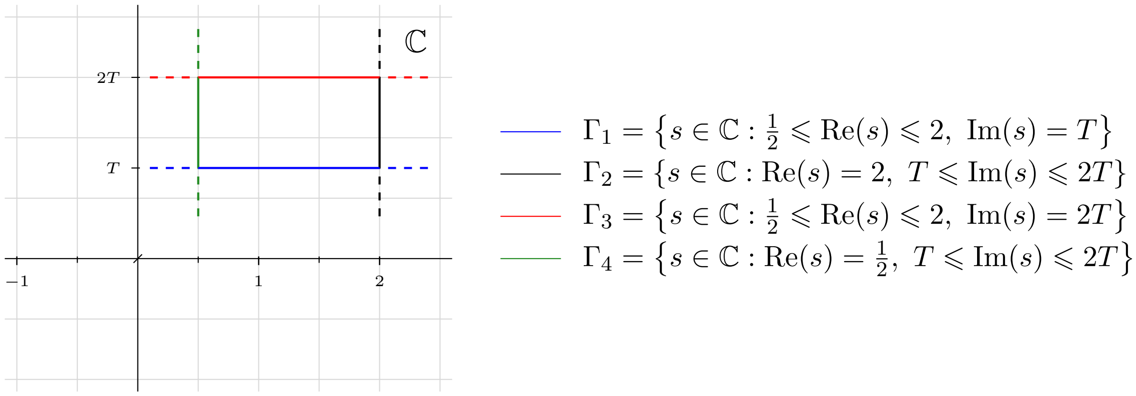

Abbildung 2: Integrationspfad Γ.

Erneut betrachtet man nun die Beiträge der einzelnen Integrale.
Für Γ_1 gilt

$$\int_{\Gamma_1} \zeta(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \zeta(\sigma + \mathrm{i}T)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \mathcal{O}\left(T^{\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}\sigma = \mathcal{O}\left(T^{\frac{1}{2}}\right) \tag{2.26}$$

nach den Abschätzungen in Lemma 3.10.
Für Γ_3 hat man dieselbe Abschätzung auf analogem Weg.
Der Weg Γ_2 ergibt

$$\int_{\Gamma_2} \zeta(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{i}\int_{T}^{2T} \zeta(2 + \mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t = \int_{T}^{2T} \sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{i}e^{-(2+\mathrm{i}t)\log n} + \mathrm{i}\,\mathrm{d}t,$$

was mithilfe der Integration der Summanden und durch die absolut gleichmäßige Konvergenz zu

$$\int_{\Gamma_2} \zeta(s)\,\mathrm{d}s = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\mathrm{i}t}\log n} + \mathrm{i}t\Bigg|_{T}^{2T} = \mathrm{i}T + \mathcal{O}(1) \tag{2.27}$$

führt, denn für $t \in \{T, 2T\}$ ist wegen $\log(n) \geqslant 1$, für $n \geqslant 3$:

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\mathrm{i}t}\log n}\right| \leqslant \frac{1}{4\log 2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned}\int_T^{2T} |Z(t)|\ \mathrm{d}t &\geqslant \left|\int_{\Gamma_4} \zeta(s)\mathrm{d}s\right| \\ &= \left|\mathrm{i}T + \mathcal{O}\left(T^{\frac{1}{2}}\right) + \mathcal{O}(1)\right| \qquad (2.28) \\ &\geq T - \left\{\mathcal{O}\left(T^{\frac{1}{2}}\right) + \mathcal{O}(1)\right\}. \qquad (2.29)\end{aligned}$$

Für hinreichend großes $T_0 > 0$, welches auch (2.6) erfüllt, gilt somit:

$$\int_T^{2T} |Z(t)|\ \mathrm{d}t > \frac{1}{2}\ T \qquad \text{für alle } T > T_0; \tag{2.30}$$

Dies führt jedoch zu einem Widerspruch in (2.7):

$$\mathcal{O}\left(T^{\frac{7}{8}}\right) = \left|\int_T^{2T} Z(t)\ \mathrm{d}t\right| = \int_T^{2T} |Z(t)|\ \mathrm{d}t > \frac{1}{2}\ T. \tag{2.31}$$

Folglich kann es keine endliche Anzahl von Nullstellen auf der kritischen Geraden geben und der Satz von Hardy ist bewiesen.

□

3 Abschätzung der ζ-Funktion

Der nachfolgende Hilfssatz richtet sich nach der Beweisidee in [2, S. 33 ff.] und beinhaltet Resultate aus der Vorlesung [1].

Lemma 3.10
Sei $s = \sigma + \mathrm{i}t$ mit $\sigma > 0, t \geq 2$, dann gilt für $t \to \infty$

i) $\zeta(s) = \mathcal{O}(1)$, *falls* $\sigma \geq 1 + \varepsilon > 1$.

ii) $\zeta(s) = \mathcal{O}\left(t^{1-\delta}\right)$, *falls* $\sigma \geq \delta$ *und* $0 < \delta < 1$ *fest gewählt ist.*

Beweis. Für $\sigma \geq 1 + \varepsilon > 1$ ist ζ offensichtlich beschränkt, denn es gilt

$$|\zeta(s)| \leq \zeta(\sigma) \leq \zeta(1+\varepsilon) < \infty.$$

Somit ist bereita Aussage *i)* bewiesen.
Wie auf Übungsblatt 7 zur Vorlesung [1] gezeigt wurde, besitzt die ζ-Funktion eine meromorphe Fortsetzung der Form

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s \cdot F(s), \qquad \sigma > 0, \tag{3.1}$$

mit der holomorphen Funktion

$$F(s) = \int_1^\infty \frac{\beta(u)}{u^{s+1}} \,\mathrm{d}u$$

und der stückweise stetigen Funktion

$$\beta(u) = u - [u] - \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad |\beta(u)| \leq \frac{1}{2},$$

wobei $[\cdot]$ die untere Gauss-Klammer bezeichnet.
Für $s \neq 1, \sigma > 0$ und $x \geq 1$ betrachtet man zunächst mittels Abelscher partieller Summation

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N},\\ n\leq x}} \frac{1}{n^s} = \frac{[x]}{x^s} + s\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{[u]}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u = \frac{[x]}{x^s} + s\int_1^x \frac{[u]}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u. \tag{3.2}$$

Damit folgt für die Differenz

$$\begin{aligned}
\zeta(s) - \sum_{\substack{n\in\mathbb{N},\\ n\leq x}} \frac{1}{n^s} &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s\int_x^\infty \frac{\beta(u)}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u - \frac{[x]}{x^s} - s\int_1^x \frac{u-\frac{1}{2}}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s\int_x^\infty \frac{\beta(u)}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u - \frac{[x]}{x^s} + \frac{s}{s-1}\left(\frac{1}{x^{s-1}} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^s}\right) \\
&= -s\int_x^\infty \frac{\beta(u)}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u + \frac{\beta(x)}{x^s} + \frac{1}{s-1}\frac{1}{x^{s-1}}.
\end{aligned}$$

Ist weiterhin $t \geq 2$, so lässt sich die ζ-Funktion wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
|\zeta(s)| &\leq \sum_{\substack{n\in\mathbb{N},\\ n\leq x}} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{|s|}{2}\int_x^\infty \frac{1}{u^{\sigma+1}}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2x^\sigma} + \frac{1}{|s-1|\,x^{\sigma-1}} \\
&\leq \sum_{\substack{n\in\mathbb{N},\\ n\leq x}} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{|s|}{2\sigma}\frac{1}{x^\sigma} + \frac{1}{2x^\sigma} + \frac{1}{tx^{\sigma-1}} \\
&< \sum_{\substack{n\in\mathbb{N},\\ n\leq x}} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{2x^\sigma}\cdot\left(\frac{\sigma+t}{\sigma}+1\right) + \frac{1}{2x^{\sigma-1}}.
\end{aligned}$$

Wegen $\sigma \geq \delta$ folgt weiter mit $x := t \geq 2$

$$\begin{aligned}
|\zeta(s)| &< \sum_{n=1}^{[t]} \frac{1}{n^\delta} + \frac{1}{2t^\delta}\cdot\left(2+\frac{t}{\delta}\right) + \frac{1}{2t^{\delta-1}} \\
&= \sum_{n=1}^{[t]} \int_{n-1}^n \frac{1}{n^\delta}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2t^\delta}\cdot\left(2+\frac{t}{\delta}\right) + \frac{1}{2}t^{1-\delta} \\
&< \sum_{n=1}^{[t]} \int_{n-1}^n \frac{1}{u^\delta}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2t^\delta}\cdot 2\frac{t}{\delta} + \frac{1}{2}t^{1-\delta} \\
&= \int_0^{[t]} u^{-\delta}\,\mathrm{d}u + \left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{2}\right)t^{1-\delta} \\
&\leq \left(\frac{1}{1-\delta}+\frac{1}{\delta}+\frac{1}{2}\right)t^{1-\delta}.
\end{aligned}$$

$\square$

Literatur

[1] R. Busam. *Analytische Zahlentheorie - Vorlesung.* Universität Heidelberg, 2014.

[2] K. Chandrasekharan. *Arithmetical Functions.* Springer Berlin Heidelberg New York, 1970.

[3] R. Rannacher. *Analysis 1 - Vorlesungsskript.* Universität Heidelberg, 2010.

[4] R. Remmert; G. Schumacher. *Funktionentheorie 2.* Springer Berlin Heidelberg, 2007.