

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG
INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
2013

SEMINARVORTRAG

Die Scott-Zhang-Interpolation für $u \in H^m(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Philipp Siehr
philipp.siehr@iwr.uni-heidelberg.de
Matr.-Nr. 2772186

betreut von
Prof. Dr. Guido Kanschat
Natasha Sharma, PhD

Datum des Vortrags: 11. Juli 2013

1 Einleitung

Diese Ausarbeitung behandelt die Scott-Zhang-Interpolation für Funktionen $u \in H^m(\Omega)$ für $m \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Die Aussagen gelten auch für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Die Sätze sind im Allgemeinen nicht richtig für die Räume $H^{0,p}(\Omega)$, da $H^{0,p}(\Omega) \not\hookrightarrow L^1(\Gamma)$ für eine Kurve $\Gamma \subset \Omega$. Aber im Falle $H^{m,p}(\Omega)$ mit $m > 1/p$ lassen sich die Aussagen ebenfalls beweisen, da diese Räume eine Spureinbettung zulassen. Der einzige Unterschied liegt darin, dass in den Abschätzungen durch den Transformationssatz h -Potenzen mit einem Exponenten in Abhängigkeit von p auftreten. Die entsprechenden Aussagen finden sich in [4]. Diese Ausarbeitung ist im Stile dieses Artikels gehalten.

1.1 Notation und Grundlagen

In diesem Abschnitt werden zunächst alle Hilfsmittel bereitgestellt und anschließend eine kurze Motivation für die Scott-Zhang-Interpolation gegeben. Jeder der mit der Standardtheorie für Numerik partieller Differentialgleichungen vertraut ist kann direkt zu Abschnitt 2 übergehen.

1.1.1 Funktionenräume und Normen

Wir betrachten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes Polygonebiet mit hinreichend regulärem Rand. Zunächst ist $C^\infty_\circ(\Omega) = \left\{ v \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(v) := \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}} \subset \Omega \text{ kompakt} \right\}$ der Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Damit ist der Sobolev-Raum $H^1_\circ(\Omega)$ definiert als Vervollständigung von $C^\infty_\circ(\overline{\Omega})$ bezüglich $\|\cdot\|_1$. Dies bedeutet insbesondere, dass $u|_{\partial\Omega} = 0$ im Spursinne ist, d.h. $\|u\|_{L^1(\partial\Omega)} = 0$. Analog sind die Sobolev-Räume höherer Ordnung $H^m(\Omega)$ definiert als Vervollständigung von $C^m(\overline{\Omega})$ bezüglich $\|\cdot\|_m$.

Die natürlichen (Sobolev-)Normen in diesen Räumen sind $\|\cdot\|_{m,\Omega} := \|\cdot\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \cdot\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$ und entsprechender Halbnorm $|\cdot|_{m,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha \cdot\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$ wobei α ein Multiindex ist (siehe [2, S. 69]). Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht bezeichnet $\|\cdot\|$ die $L^2(\Omega)$ -Norm $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} := \|\cdot\|_0$.

1.1.2 Diskrete Räume und finite Elemente

Sei Ω_h eine Folge von Zerlegungen von $\overline{\Omega}$ in abgeschlossene Dreiecke T . Es bezeichne $h_T := \text{diam}(T)$ den Durchmesser einer Zelle $T \in \Omega_h$. Für die Folge von Triangulierungen soll $h = \max_{T \in \Omega_h} h_T \rightarrow 0$ gelten. Für die Folge von Zerlegungen werden drei weitere Eigenschaften gefordert.

Strukturregularität: Der Schnitt zweier Dreiecke einer Zerlegung ist entweder leer oder ein Eckpunkt oder eine komplette Kante.

Formregularität: Mit dem Inkreisradius ρ_T gilt für jedes Dreieck gleichmäßig für $h \rightarrow 0$:
 $\max_{T \in \Omega_h} \frac{h_T}{\rho_T} \leq \gamma_0 < \infty$. Das heißt, dass keine stark degenerierten Zellen zugelassen werden.

Größenregularität: Für alle Dreiecke $T \in \Omega_h$ gilt $\frac{\max h_T}{\min h_T} \leq \tilde{\gamma}_0 < \infty$ gleichmäßig für $h \rightarrow 0$. Das heißt alle Dreiecke sind von gleicher Größenordnung.

Sind alle drei Eigenschaften erfüllt spricht man von einer regulären Triangulierung bzw. von regulären Gittern. Auf dieser Triangulierung werden die finiten Elemente Ansatzräume durch

$$V_h^{(r)} := \{v_h \in C(\Omega) : v_h|_T \in \mathbb{P}_T^r \ \forall T \in \Omega_h\}, \quad (1.1)$$

$$V_{h,o}^{(r)} := \left\{ v_h \in V_h^{(r)} : v_h|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad (1.2)$$

definiert, mit dem Raum $\mathbb{P}_T^r := \text{span} \{x^\alpha y^\beta : 0 \leq \alpha + \beta \leq r\}$. Im Folgenden wird $V_h^{(r)}$ mit V_h bezeichnet, da viele Resultate unabhängig vom Polynomgrad sind. Weiteren sei $\dim(V_h) = N$ und die Menge der Knotenpunkte mit $\mathcal{N}_h := \{a_j\}_{j=1}^N$ bezeichnet. Dies können Punkte auf den Eckpunkten, den Kanten oder dem Zellinneren sein siehe Abbildung 1. Die Position der Punkte ist in der in Abschnitt 2 konstruierten Interpolation wichtig. Für V_h definieren wir die Knotenbasis $\{\phi^{(i)}\}_{i=1}^N$ durch die Bedingung $\phi^{(i)}(a_j) = \delta_{ij} \ \forall i, j = 1 \dots N$. Eine beispielhafte Visualisierung findet sich in Abbildung 2 für lineare und quadratische Ansätze.

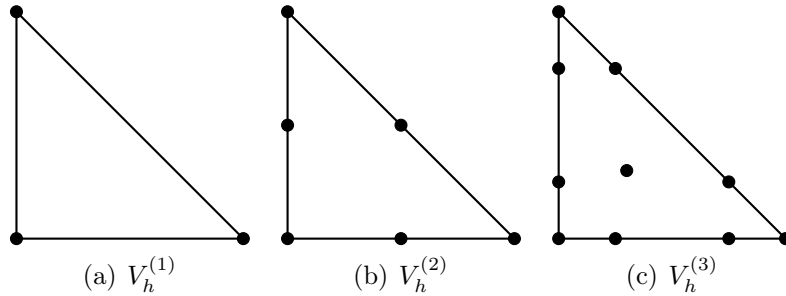


Abbildung 1: Visualisierung der Freiheitsgrade für finite Elemente. Für lineare finite Elemente werden die Freiheitsgrade in den Eckpunkten gesetzt. Bei quadratischen finiten Elementen sind weitere Freiheitsgrade auf den Kantenmitten. Kubische finite Elemente benötigen zehn Freiheitsgrade. Für stetige Übergänge über Kanten und Eckpunkte werden zwei Freiheitsgrade in den Eckpunkten sowie zwei weitere in den Gauß-Punkten auf jeder Kante gesetzt. Als zehnter Freiheitsgrad kann der Schwerpunkt gewählt werden.

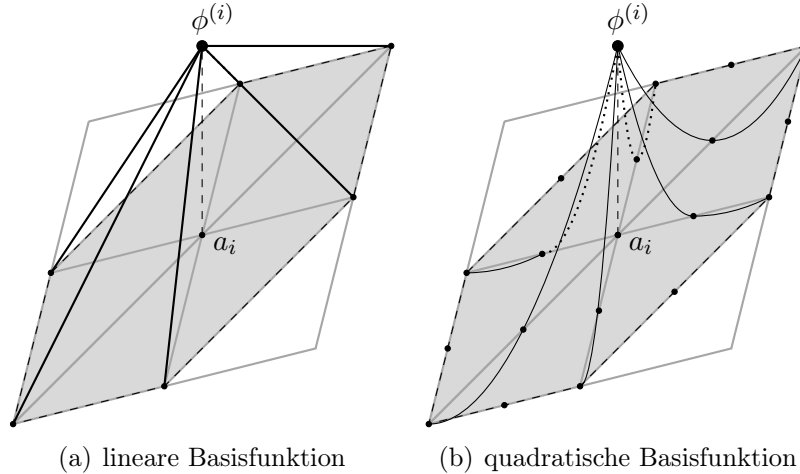


Abbildung 2: Visualisierung einer linearen Basisfunktion (a) und einer quadratischen Basisfunktion (b) mit ihrem lokalen Träger auf einem regelmäßigen Gitter. Die Basisfunktionen besitzen den Wert 1 im zugehörigen Freiheitsgrad und sind in allen anderen Freiheitsgraden 0.

1.2 Motivation

Wir betrachten die Laplace-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randwerten in variationaler Formulierung:

$$\text{Suche } u \in V = H_0^1(\Omega) : \quad (\nabla u, \nabla \phi) = (f, \phi) \quad \forall \phi \in V. \quad (1.3)$$

Mit der Wahl $V_h \subset V$ ergibt sich die diskrete variationelle Formulierung:

$$\text{Suche } u_h \in V_h : \quad (\nabla u_h, \nabla \phi_h) = (f, \phi_h) \quad \forall \phi_h \in V_h. \quad (1.4)$$

Von großem Interesse ist nun eine a priori Abschätzung, die eine Aussage über die Approximationsgüte von u_h an u ermöglicht. Wir betrachten den Energiefehler $\|\nabla e_h\| = \|\nabla(u - u_h)\|$. Es ergibt sich zunächst die Bestapproximationseigenschaft

$$\|\nabla e_h\| \leq \inf_{\phi_h \in V_h} \|\nabla(u - \phi_h)\|, \quad (1.5)$$

denn es gilt mit einem beliebigen $\phi \in V_h$ mit Hilfe der Galerkin-Orthogonalität:

$$\begin{aligned} \|\nabla e_h\|^2 &= (\nabla e_h, \nabla(u - \phi_h)) + (\nabla e_h, \nabla(\phi_h - u_h)) \\ &\leq \|\nabla e_h\| \|\nabla(u - \phi_h)\|. \end{aligned}$$

Der nächste Schritt in den üblichen a priori Abschätzungen setzt nun $\phi_h := \pi_h u$ mit einer Projektion/Interpolation $\pi_h \cdot : V \rightarrow V_h$ und es wird

$$\|\nabla e_h\| \leq \|\nabla(u - \pi_h u)\| \leq ch^2 \|u\|? \quad (1.6)$$

gefolgert mit noch unbekanntem Größen auf der rechten Seite. Nun stellt sich die Frage, wie diese Interpolation π_h gewählt werden kann und durch was die rechte Seite beeinflusst wird. In (1.1) wurde der Raum der finiten Elemente definiert. Daher bietet sich die folgende Definition für eine Interpolation in Basisdarstellung des Raumes V_h an:

$$\pi_h u(x) := \sum_{j=1}^N \phi^{(j)}(x) \chi(a_j), \quad (1.7)$$

wobei $\chi(a_j)$ die Knotenfunktionale sind, welche die Funktion u am Freiheitsgrad a_j beschreiben. Im folgenden Abschnitt betrachten wir zwei Interpolationen genauer.

1.2.1 Knoteninterpolation

Die einfachste Wahl der Knotenfunktionale ist die Funktionsauswertung an dem entsprechenden Punkt:

$$\chi(a_j) := u(a_j). \quad (1.8)$$

Damit ergibt sich $I_h u(x) = \sum_{j=1}^N \phi^{(j)}(x) u(a_j)$. Ein Vorteil dieser Wahl ist die Einfachheit der Auswertung, jedoch besitzt sie dadurch auch einen Nachteil. Für Funktionen $u \in H^1(\Omega)$ ist diese Wahl nicht wohldefiniert, denn $H^1(\Omega) \not\hookrightarrow C(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $d = 2, 3$. Da jedoch u Lösung von (1.3) ist, ist nur in seltenen Fällen höhere Regularität zu erwarten.

1.2.2 Clément-Interpolation

Eine Lösung für dieses Problem bietet die Clément-Interpolation, die auch für Funktionen $u \in H^1$ wohldefiniert sind. Dabei werden die Knotenfunktionale wie folgt gesetzt:

$$\chi(a_j) := \int_{\tilde{P}_{a_j}} u(y) dy \quad (1.9)$$

mit den Zellpatches

$$\tilde{P}_{a_j} := \bigcup_{\substack{T \in \Omega_h \\ a_j \in \Omega_h}} T, \quad \tilde{P}_T := \bigcup_{\substack{T' \in \Omega_h \\ T' \cap T \neq \emptyset}} T'. \quad (1.10)$$

Der zweite Zellpatch wird an dieser Stelle eingeführt, da dieser in den Abschätzungen in Abschnitt 2 eine wichtige Rolle spielt. In Abbildung 3 sind die auftretenden Zellpatches visualisiert. Die so definierte Interpolation ist H^1 -stabil und löst damit das Problem der Punktauswertung der Knoteninterpolation. Aber auch diese Interpolation besitzt eine Eigenschaft, die nicht wünschenswert ist. Sie erhält keine homogenen Dirichlet Randwerte, da auch Werte am Rand über die umliegenden Zellen gemittelt werden.

Dies motiviert die Konstruktion einer Interpolation die keinen der Nachteile obiger Interpolationen besitzt.

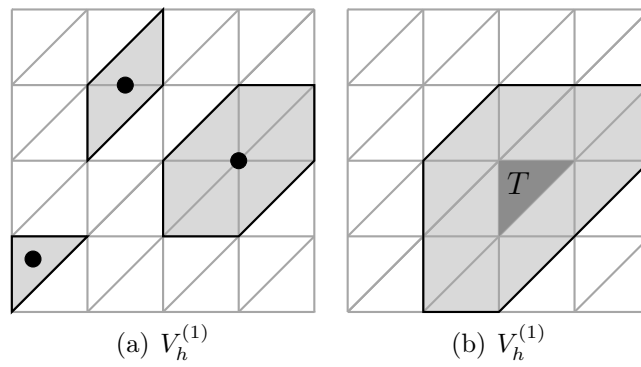


Abbildung 3: Visualisierung der Zellpatches. Abbildung (b) zeigt die Knotenpatches für Knoten in einem Eckpunkt, auf einer Kante und im Zellinneren. In Abbildung (b) ist der große Zellpatch zu einer Zelle T dargestellt. Die Definitionen befinden sich in Gleichung (1.10).

2 Scott-Zhang-Interpolation

In diesem Abschnitt wird die Scott-Zhang-Interpolation konstruiert, die keinen Nachteil der vorgestellten Interpolationen in Abschnitt 1 besitzt. Anschließend wird gezeigt, dass die Scott-Zhang-Interpolation ähnliche Approximationseigenschaften liefert. Die Motivation für diese Sätze wurde bereits in Abschnitt 1 gegeben, sodass die Sätze direkt nacheinander bewiesen werden. An dieser Stelle sei erwähnt, dass in einigen Beweisen die Notation $h := h_{\sigma_i}$ oder $h := h_T$ verwendet wird um die Beweise übersichtlich zu halten. Dies wird vor jedem Beweis nochmal explizit betont. Nur in der abschließenden Folgerung 2.9 wird eine Aussage hergeleitet, die sich auf $h := \max_{T \in \Omega_h} h_T$ bezieht.

2.1 Konstruktion der Interpolation

Satz 2.1

Sei $m \geq 1$ und Ω_h ein reguläres Gitter. Dann gibt es einen Projektionsoperator $\mathcal{Z}_h : H^m(\Omega) \rightarrow V_h$ mit der Eigenschaft $H^1_c(\Omega) \rightarrow V_{h,\circ}$.

Beweis. Der Beweis verläuft konstruktiv in drei Schritten. Dabei sei angemerkt, dass der Index i immer in Bezug zu einem speziellen Freiheitsgrad a_i steht.

i) Wahl des Integrationsgebietes σ_i

Sei $a_i \in \mathcal{N}_h$ ein Knotenpunkt. Wir definieren σ_i wie folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_i &:= T, & \text{falls } a_i \in T \setminus \partial T. \\ \sigma_i &:= E, & \text{falls } a_i \in E \setminus \partial E \subset \partial T \text{ Kante eines Dreiecks.} \\ \sigma_i &:= E \text{ mit } a_i \in \bar{E}, & \text{falls } a_i \notin \partial \Omega \text{ ein Eckpunkt eines Dreiecks.} \\ \sigma_i &:= E \text{ mit } E \subset \partial \Omega, & \text{falls } a_i \in \partial \Omega \text{ ein Eckpunkt eines Dreiecks.} \end{aligned}$$

ii) Konstruktion der Knotenfunktionale $\chi(a_i)$

Sei $\{\phi_i^{(j)}\}_{j=1}^{n_0}$ die Knotenbasis für ein σ_i . Zum Beispiel bei linearen finiten Elementen sind dies Kanten, da die Freiheitsgrade in den Eckpunkten liegen. Für eine bestimmte Kante gibt es dann $n_0 = 2$ Basisfunktionen bei linearen finiten Elementen.

Wir definieren den Raum $X_i := \text{span}\{\phi_i^{(j)}, j = 1, \dots, n_0\}$, welcher endlichdimensionaler, abgeschlossener Teilraum von $L^2(\sigma_i)$ ist. Dann ist $\{\tilde{\psi}_i^{(k)}\}_{k=1}^{n_0}$ mit $\tilde{\psi}_i^{(k)} : X_i^* \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\tilde{\psi}_i^{(k)}(\phi_i^{(j)}) = \delta_{jk}$ für $j, k = 1, \dots, n_0$ eine Basis des Dualraumes X_i^* . Mit dem Darstellungssatz von Riesz existieren eindeutige Repräsentanten $\psi_i^{(k)} \in X_i$ für jedes $\tilde{\psi}_i^{(k)} \in X_i^*$, so dass:

$$\int_{\sigma_i} \psi_i^{(k)}(x) \phi_i^{(j)}(x) dx = \delta_{jk}, \quad k, j = 1, \dots, n_0. \quad (2.1)$$

Zu jedem a_i gehört eine Knotenbasisfunktion $\phi^{(i)}$ mit $\phi^{(i)}(a_i) = 1$. Ebenso bezeichnen wir für jedes a_i die zugehörige duale Basisfunktion mit $\tilde{\psi}^{(i)}$. Entsprechend gilt $\tilde{\psi}^{(i)}(\phi^{(i)}) = 1$.

Damit folgt für (2.1) mit entsprechenden Repräsentanten $\psi^{(i)}$ der $\tilde{\psi}^{(i)}$:

$$\int_{\sigma_i} \psi^{(i)}(x)\phi^{(j)}(x)dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

Durch diese Konstruktion der Dualbasis definieren wir nun die *Scott-Zhang-Interpolation*:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_h : H^m(\Omega) &\rightarrow V_h \text{ mit} \\ \mathcal{Z}_h v(x) &:= \sum_{i=1}^N \phi^{(i)}(x) \underbrace{\int_{\sigma_i} \psi^{(i)}(y)v(y)dy}_{=:\chi(a_i)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

iii) *Eigenschaften der Scott-Zhang-Interpolation* \mathcal{Z}_h

a) Wohldefiniertheit von $\chi(a_i)$

- 1) Ist $\sigma_i = T$, dann ist für $v \in H^m(\Omega) \Rightarrow v \in L^1(\Omega) \Rightarrow v \in L^1(\sigma_i)$.
- 2) Ist $\sigma_i = E$, dann gilt mit dem Spurlemma $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^1(\sigma_i)$ für $m \geq 1$, d.h. $\|v\|_{L^1(\sigma_i)} \leq c_{\Omega, \sigma_i} \|v\|_{m, \Omega} \forall v \in H^m(\Omega)$. Demnach sind auch Integrale über Kanten wohldefiniert.

b) Erhalt homogener Randwerte

Sei $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^m(\Omega)$, also $\|v\|_{L^1(\partial\Omega)} = 0$. Sei nun $a_i \in \partial\Omega$, dann ist $\sigma_i \subset \partial\Omega$ nach Wahl von σ_i in Schritt i . Für die zugehörigen Knotenfunktionale folgt mit der Hölder-Ungleichung:

$$|\chi(a_i)| = \left| \int_{\sigma_i} \psi^{(i)}(y)v(y)dy \right| \leq \|\psi^{(i)}\|_{L^\infty(\sigma_i)} \|v\|_{L^1(\sigma_i)} = 0.$$

Demnach vereinfacht sich die Interpolation von v zu

$$\mathcal{Z}_h v = \sum_{a_i \in \mathcal{N}_h} \phi^{(i)} \chi(a_i) = \sum_{\substack{a_i \in \mathcal{N}_h \\ a_i \notin \partial\Omega}} \phi^{(i)} \chi(a_i).$$

Für die verbleibenden Basisfunktionen gilt $\text{supp}(\phi^{(i)}) \subset \Omega$, demnach liefern diese Basisfunktionen keinen Beitrag auf $\partial\Omega$. Also ist $\mathcal{Z}_h v \in V_{h, \circ}$.

c) \mathcal{Z}_h ist ein Projektionsoperator

Dies bedeutet $\mathcal{Z}_h v_h = v_h \forall v_h \in V_h$.

Sei also $v_h \in V_h$. Mit der Knotenbasis von V_h gilt dann $v_h = \sum_{j=1}^N \phi^{(j)} v_h^j$. Für die Interpolation von v_h folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_h v_h &= \sum_{i=1}^N \phi^{(i)} \int_{\sigma_i} \psi^{(i)}(y) \left\{ \sum_{j=1}^N \phi^{(j)}(y) v_h^j \right\} dy \\ &= \sum_{i=1}^N \phi^{(i)} \sum_{j=1}^N v_h^j \int_{\sigma_i} \psi^{(i)}(y) \phi^{(j)}(y) dy \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^N \phi^{(i)} \sum_{j=1}^N v_h^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^N \phi^{(i)} v_h^i = v_h$$

□

Bemerkung 2.2

Die Wahl der σ_i ist nicht eindeutig. Daher müsste man streng genommen $\mathcal{Z}_{h,\sigma}$ betrachten. Dies macht jedoch keinen Unterschied für die folgenden Sätze, da die explizite Wahl in keinem Beweisschritt benötigt wird.

2.2 Transformationen

In diesem Abschnitt werden einige Hilfsmittel für die nachfolgenden Beweise bereitgestellt. Der Gedanke liegt dabei auf der Anwendung des Transformationsatzes, zur Gewinnung von h -Potenzen in den a priori Abschätzungen. Hierfür benötigen wir Transformationen auf ein Referenzdreieck \hat{T} und Aussagen über die auftretenden Größen bei Transformation von Integralen und Ableitungen. Das Referenzdreieck wird definiert über die Eckpunkte $\hat{x}_1 = (0, 0)$, $\hat{x}_2 = (1, 0)$ und $\hat{x}_3 = (0, 1)$.

Für ein reguläres Dreiecksgitter lässt sich jede Zelle durch eine affin-lineare Transformation $F : \hat{T} \rightarrow T$ mit $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$ beschreiben, wobei $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Die Umkehrabbildung $F^{-1} : T \rightarrow \hat{T}$ ist gegeben durch $F^{-1}(x) = B^{-1}x - B^{-1}b$.

Die Transformation setzt sich aus vier einzelnen Transformationsschritten zusammen: Translation um einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$, Streckung des Dreiecks in jede Raumdimension durch B_{st} , Rotation um einen Winkel α durch B_{rot} und Scherung um einen Faktor c (hier um die x -Achse) durch B_s :

$$B_{\text{st}} = \begin{pmatrix} h_x & 0 \\ 0 & h_y \end{pmatrix}, \quad B_{\text{rot}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad B_s = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sofern Ω_h ein reguläres Gitter ist ist nur die Streckung abhängig von h .

Lemma 2.3

Sei σ_i eine Zelle oder Kante. Dann gelten folgende Aussagen über die Matrix B der Transformation $F : \hat{T} \rightarrow T$ bezüglich einer beliebigen Norm $\|\cdot\|$:

- i) $\|B\| \leq ch_{\sigma_i}$
- iii) $\det(B) = h_{\sigma_i}^{\dim \sigma_i}$
- ii) $\|B^{-1}\| \leq ch_{\sigma_i}^{-1}$
- iv) $\det(B^{-1}) = h_{\sigma_i}^{-\dim \sigma_i}$

Beweis. Für Kanten, also Elemente in \mathbb{R}^1 sind diese Aussagen klar. Daher sei nun $\sigma_i = T$. Die Aussagen iii) und iv) folgen aus den Überlegungen vor diesem Lemma. Ohne Einschränkung sei $b = 0$ und $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Die Referenzzelle \hat{T} wird demnach auf das Dreieck T mit den Eckpunkten $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (a, c)$ und $x_3 = (b, d)$ abgebildet.

i) Es folgt direkt:

$$\begin{aligned} h_T^2 &= \max\{\|x_1 - x_2\|^2, \|x_1 - x_3\|^2, \|x_2 - x_3\|^2\} \\ &\geq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|^2 + \frac{1}{2}\|x_1 - x_3\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = \frac{1}{2}\|B\|_{\text{Fr}}^2. \end{aligned}$$

ii) Für den Inkreisradius ρ_T gilt mit dem Flächeninhalt A und Umfang U : $\rho_T = 2AU^{-1}$. Der Flächeninhalt lässt sich berechnen durch:

$$A = |T| = \int_T 1 dx = \int_{\hat{T}} |\det(B)| d\hat{x} = |\det(B)| |\hat{T}| = \frac{1}{2} |\det(B)|.$$

Eingesetzt ergibt dies zusammen mit dem Umfang:

$$\begin{aligned} \rho_T^{-1} &= \frac{1}{2}UA^{-1} = \{\|x_1 - x_2\| + \|x_1 - x_3\| + \|x_2 - x_3\|\} |\det(B)|^{-1} \\ &\geq \{\|x_1 - x_2\| + \|x_1 - x_3\|\} |\det(B)|^{-1} \\ &= \left\{ (a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} + (b^2 + d^2)^{\frac{1}{2}} \right\} |ad - bc|^{-1} \\ &\geq \{a^2 + c^2 + b^2 + d^2\}^{\frac{1}{2}} |ad - bc|^{-1} = \|B^{-1}\|_{\text{Fr}}. \end{aligned}$$

Damit ist $\|B^{-1}\| \leq c\|B^{-1}\|_{\text{Fr}} \leq c\rho_T^{-1} \leq ch_T^{-1}$.

□

Bemerkung 2.4

Für die nachfolgenden Beweise sind folgende Schritte wichtig:

Schritt 1: Transformation $F : \hat{T} \rightarrow T$.

- Integrale liefern durch den Transformationssatz $|\det(\partial_{\hat{x}}F)| = |\det(B)| = h_T^{\dim \sigma_i}$.
- Ableitungen transformieren sich in der Form $\hat{\partial}_i = \sum_{j=1}^d b_{ij} \partial_j$, liefern also pro Ableitungsstufe einen Faktor h_T^{-1} , da einzelne Elemente der Matrix B mit den Normen aus Lemma 2.3 abgeschätzt werden können.

Schritt 2: Transformation $F^{-1} : T \rightarrow \hat{T}$.

- Integrale liefern durch den Transformationssatz $|\det(\partial_x F^{-1})| = |\det(B^{-1})| = h_T^{-\dim \sigma_i}$.
- Ableitungen transformieren sich in der Form $\partial_i = \sum_{j=1}^d b_{ij}^{(-1)} \hat{\partial}_j$, liefern also pro Ableitungsstufe einen Faktor h_T^1 .

Betrachte dazu die ausführlichen Beweise in [1, S.105, Satz 3.6 (Spez. Interpolationsatz)].

2.3 Stabilitätseigenschaft

Für die nachfolgenden Resultate benötigen wir zunächst einen Hilfssatz, der die Beschränktheit der Dualbasis mit entsprechenden h -Potenzen sichert.

Lemma 2.5 (Beschränktheit der Dualbasis)

Sei Ω_h ein formreguläres Gitter, dann gilt für jedes $a_i \in \mathcal{N}_h$:

$$\|\psi^{(i)}\|_{L^\infty(\sigma_i)} \leq ch_{\sigma_i}^{-\dim \sigma_i}. \quad (2.4)$$

Beweis. Es wird die Notation $h := h_{\sigma_i}$ verwendet. Auf σ_i gilt:

$$\int_{\sigma_i} \psi_i^{(j)}(x) \phi_i^{(k)}(x) dx = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n_0$$

Diese Eigenschaft überträgt sich auf das Referenzgebiet mit dem Transformationssatz:

$$\int_{\hat{\sigma}_i} \psi_i^{(j)}(F(\hat{x})) \underbrace{\phi_i^{(k)}(F(\hat{x}))}_{=\phi_i^{(k)}(\hat{x})} |\det(B)| d\hat{x} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n_0$$

Also ist die duale Basisfunktion auf der Referenzzelle gegeben durch

$$\hat{\psi}_i^{(j)}(\hat{x}) := \psi_i^{(j)}(F(\hat{x})) |\det(B)|.$$

Und die zu zeigende Abschätzung folgt, da die duale Basisfunktion auf der Referenzzelle ein Polynom ist unter Verwendung von Lemma 2.5.

$$\|\psi_i^{(j)}\|_{L^\infty(\sigma_i)} = \|\hat{\psi}_i^{(j)}(\hat{x})\|_{L^\infty(\hat{\sigma}_i)} |\det(B)|^{-1} \leq ch^{-\dim(\sigma_i)}.$$

□

Dieser Hilfssatz ermöglicht nun den Beweis des folgenden Satzes.

Satz 2.6 (Stabilität der Scott-Zhang-Interpolation)

Sei $v \in H^l(\Omega)$ mit $l \geq 1$ und Ω_h ein formreguläres Gitter. Sei $T \in \Omega_h$, dann gilt für $0 \leq m \leq l$:

$$\|\mathcal{Z}_h v\|_{m,T} \leq c \sum_{k=0}^l h_T^{k-m} |v|_{k,\tilde{P}_T}. \quad (2.5)$$

Beweis. In diesem Beweis verwenden wir die Notation $h := h_T$.

i) Zunächst wird das folgende Hilfsresultat gezeigt:

$$\forall v \in H^m(T) \text{ gilt: } \|v\|_{m,T} \leq ch^{-m+1} \|\hat{v}\|_{m,\hat{T}}. \quad (2.6)$$

Es gilt mit Hilfe des Transformationssatzes unter Ausnutzung von Lemma 2.3:

$$\begin{aligned} |v|_{m,T} &\leq c \|B^{-1}\|_m |\det(B)|^{\frac{1}{2}} |\hat{v}|_{m,\hat{T}} \\ &\leq ch^{-m+1} |\hat{v}|_{m,\hat{T}}. \end{aligned}$$

Und mit der kompletten Sobolev-Norm folgt direkt

$$\begin{aligned}\|v\|_{m,T}^2 &= \sum_{i=0}^m |v|_{i,T}^2 \leq c \sum_{i=0}^m h^{2(-i+1)} |\hat{v}|_{i,\hat{T}}^2 \\ &\leq ch^{2(-m+1)} \sum_{i=0}^m |\hat{v}|_{i,\hat{T}}^2 = ch^{2(-m+1)} \|\hat{v}\|_{m,\hat{T}}^2.\end{aligned}$$

ii) Sie nun $v \in H^l(\Omega)$. Dann gilt mit n_1 , Anzahl der Freiheitsgrade der Zelle T :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Z}_h v\|_{m,T} &\leq \sum_{i=1}^{n_1} |\chi(a_i)| \|\phi^{(i)}\|_{m,T} \\ &\leq ch^{-m+1} \max_{1 \leq i \leq n_1} \|\hat{\phi}^{(i)}\|_{m,\hat{T}} \sum_{i=1}^{n_1} |\chi(a_i)|.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Die Basisfunktionen auf der Referenzzelle sind beschränkt, daher betrachten wir den letzten Faktor in (2.7). Mit der Hölder-Ungleichung und Lemma 2.5 folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n_1} |\chi(a_i)| &= \sum_{i=1}^{n_1} \left| \int_{\sigma_i} \psi^{(i)}(x) v(x) dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_1} \|\psi^{(i)}\|_{L^\infty(\sigma_i)} \|v\|_{L^1(\sigma_i)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_1} h^{-\dim(\sigma_i)} \|v\|_{L^1(\sigma_i)}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Um den Beweis zu vervollständigen fehlt die Betrachtung der L^1 -Norm von v . Wir betrachten ohne Einschränkung zwei Fälle. Zum einen sind alle σ_i Kanten, zum anderen sind alle σ_i die Zelle T . Wenn gemischte Freiheitsgrade auftreten (bspw. P^3), dann wird die Summe in (2.8) entsprechend umsortiert, sodass nachfolgende Abschätzungen auf die Teilsummen angewandt werden können. Im Folgenden wird die Notation $d := \dim(T) = 2$ verwendet, um darzustellen durch was h -Potenzen auftreten. Demnach gilt $d - 1 = \dim(E)$ für Kanten.

a) Sei σ_i eine Kante eines Dreiecks T_i . Dies muss nicht T sein, man beachte die Wahl der σ_i in Schritt i) im Beweis von Satz 2.1. Mit der Spurabschätzung und den Transformationsargumenten folgt dann:

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^1(\sigma_i)}^2 &\leq h^{2(d-1)} \|\hat{v}\|_{L^1(\hat{\sigma}_i)}^2 \leq h^{2(d-1)} c \|\hat{v}\|_{l,\hat{T}}^2 \\ &\leq ch^{2(d-1)} \sum_{k=0}^l |\hat{v}|_{k,\hat{T}}^2 \leq ch^{2(d-1)} \sum_{k=0}^l h^{2k} h^{-d} |v|_{k,T_i}.\end{aligned}$$

Also:

$$\|v\|_{L^1(\sigma_i)} \leq c \sum_{k=1}^l h^{k+(d-1)-\frac{d}{2}} |v|_{k,T_i} \leq c \sum_{k=1}^l h^{k+(d-1)-\frac{d}{2}} |v|_{k,\bar{P}_T}.\tag{2.9}$$

Setzt man (2.9) in (2.8) und (2.7) ein ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Z}_h v\|_{m,T} &\leq ch^{-m+1} \sum_{i=1}^{n_1} h^{-(d-1)} \|v\|_{L^1(\sigma_i)} \\
&\leq ch^{-m+1} \sum_{i=1}^{n_1} h^{-(d-1)} \sum_{k=1}^l h^{k+(d-1)-\frac{d}{2}} |v|_{k,\tilde{P}_T} \\
&= c \sum_{k=1}^l h^{k-m} |v|_{k,\tilde{P}_T}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

b) Sei σ_i nun die Zelle T . Dann folgt mit der Hölder-Ungleichung und den Transformationsargumenten:

$$\|v\|_{L^1(\sigma_i)} = \|v\|_{L^1(T)} \leq h^{\frac{d}{2}} \|v\|_{0,T} \leq ch^{\frac{d}{2}} \sum_{k=0}^l h^k |v|_{k,T}. \tag{2.11}$$

Ebenso wird (2.11) in (2.8) und (2.7) eingesetzt. Damit folgt:

$$\|\mathcal{Z}_h v\|_{m,T} \leq ch^{-m+1} \sum_{i=1}^{n_1} h^{-d} h^{\frac{d}{2}} \sum_{k=0}^l h^k |v|_{k,T} = c \sum_{k=1}^l h_T^{k-m} |v|_{k,\tilde{P}_T}. \tag{2.12}$$

Die Gleichungen (2.10) und (2.12) vervollständigen den Beweis. \square

2.4 Approximationseigenschaft

Die Resultate der vorangegangenen Kapitel ermöglichen schließlich die offene Frage der Approximationsgüte von $\mathcal{Z}_h u$ an u zu beantworten. Hierfür benötigen wir ein weiteres Hilfsresultat, das *Bramble-Hilbert-Lemma*. Der Beweis kann in [1, S.102] nachgeschlagen werden.

Lemma 2.7

Sei $F(\cdot) : H^m(T) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional mit den drei Eigenschaften:

- i) $|F(v)| \leq c \|v\|_{m,T}$ (Beschränktheit),
- ii) $|F(u+v)| \leq c(|F(u)| + |F(v)|)$ (Sublinearität),
- iii) $F(q) = 0, \forall q \in P^{m-1}(T)$ (Annulierungseigenschaft).

Dann gilt $|F(v)| \leq c |v|_{m,T}$ für $v \in H^m(T)$.

\square

Satz 2.8 (Approximationseigenschaft der Scott-Zhang-Interpolation)

Sei $v \in H^l(\Omega)$ mit $l \geq 1$ und Ω_h ein formreguläres Gitter. Dann gilt für $0 \leq m \leq l \leq r+1$ mit den finiten Elemente Ansatz $V_h^{(r)}$:

$$\left(\sum_{T \in \Omega_h} h_T^{2(m-l)} \|v - \mathcal{Z}_h v\|_{m,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \|v\|_{l,\Omega}. \quad (2.13)$$

Beweis. Auch in diesem Beweis verwenden wir die Notation $h := h_T$.

i) Sei $p \in P^r(\Omega)$ und $T \in \Omega_h$. Dann gilt mit $\mathcal{Z}_h p = p$ auf T :

$$\|v - \mathcal{Z}_h v\|_{m,T} \leq \|v - p\|_{m,T} + \|\mathcal{Z}_h(p - v)\|_{m,T}. \quad (2.14)$$

Betrachtet man die Summanden getrennt ergibt sich:

a) Für alle $k \leq m$ gilt unter Verwendung der üblichen Transformationsargumente:

$$\begin{aligned} \|v - p\|_{m,T}^2 &= \sum_{\nu=0}^m |v - p|_{\nu,T}^2 \leq c \sum_{\nu=0}^m h^{2(k-\nu)} |v - p|_{k,T}^2 \\ &\leq c h^{2(k-m)} |v - p|_{k,T}^2 \leq c h^{2(k-m)} \|v - p\|_{k,\tilde{P}_T}^2. \end{aligned}$$

Damit gilt die Abschätzung:

$$\|v - p\|_{m,T} \leq c \sum_{k=0}^m h^{k-m} \|v - p\|_{k,\tilde{P}_T}.$$

b) Mit Satz 2.6 folgt für den zweiten Summanden direkt

$$\|\mathcal{Z}_h(p - v)\|_{m,T} \leq c \sum_{k=0}^m h^{k-m} \|v - p\|_{k,\tilde{P}_T}.$$

Beide Ungleichungen ergeben mit (2.14)

$$\|v - \mathcal{Z}_h v\|_{m,T} \leq c \sum_{k=0}^m h^{k-m} \|v - p\|_{k,\tilde{P}_T}. \quad (2.15)$$

ii) Betrachte nun die Minimierungsaufgabe:

$$F(v) := \inf_{p \in P^r(\Omega)} \|v - p\|_{k,\tilde{P}_T}. \quad (2.16)$$

Da P_Ω^r ein endlichdimensionaler, abgeschlossener Teilraum von $H^l(\Omega)$ ist, besitzt diese Aufgabe die (eindeutige) Lösung p^* . Daher kann in (2.15) $p = p^*$ gesetzt werden und anschließend das Bramble-Hilbert-Lemma (Satz 2.7) verwendet werden. Die Voraussetzungen des Bramble-Hilbert-Lemmas sind für $F : H^m(\tilde{P}_T) \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt, denn es gilt:

- i) Beschränktheit: $p = 0 \in P^r(\Omega) \Rightarrow |F(v)| \leq \|v - 0\|_{k, \tilde{P}_T} \leq \|v\|_{l, \tilde{P}_T}$.
- ii) Sublinearität folgt aus der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_{k, \tilde{P}_T}$.
- iii) Annulierungseigenschaft: Für $q \in P^{m-1}(\Omega)$ gilt $\inf_{p \in P^r(\Omega)} \|q - p\|_{k, \tilde{P}_T} = \|q - q\|_{k, \tilde{P}_T} = 0$.

Die Anwendung des Bramble-Hilbert-Lemmas liefert nach Transformation auf einen Referenzpatch:

$$\|v - p^*\|_{k, \tilde{P}_T} \leq ch^{-k+1} \|\hat{v} - \hat{p}^*\|_{k, \tilde{P}_{\hat{T}}} \leq ch^{-k+1} |\hat{v}|_{k, \tilde{P}_{\hat{T}}} \leq ch^{l-k} |v|_{l, \tilde{P}_T} \quad (2.17)$$

Eingesetzt in (2.15) folgt zunächst:

$$\|v - \mathcal{Z}_h v\|_{m, T} \leq c \sum_{k=0}^m h^{k-m} ch^{l-k} |v|_{l, \tilde{P}_T} \leq ch^{l-m} |v|_{l, \tilde{P}_T},$$

und durch Summation über alle Zellen schließlich das gewünschte Ergebnis:

$$\sum_{T \in \Omega_h} h_T^{2(m-l)} \|v - \mathcal{Z}_h v\|_{m, T}^2 \leq \sum_{T \in \Omega_h} |v|_{l, \tilde{P}_T}^2 \leq c |v|_{l, \Omega}^2 \leq c \|v\|_{l, \Omega}^2.$$

□

Dieser Satz ist ein Analogon zu den Aussagen für die Knoten- oder Clément-Interpolation. Damit besitzt die Scott-Zhang-Interpolation die gleiche Approximationseigenschaft wie die anderen Interpolationen, und hat darüber hinaus keinen der zwei Nachteile der anderen Interpolationen. Die Aussagen zur Knoteninterpolation finden sich in [1, S. 105] und zur Clément-Interpolation in [3, S. 71].

Unter Ausnutzung der Größenregularität kann nun eine Folgerung formuliert werden, welche die Fragestellung in (1.6) beantwortet.

Folgerung 2.9

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.8 gilt:

$$\left(\sum_{T \in \Omega_h} \|v - \mathcal{Z}_h v\|_{m, T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq h^{l-m} \|v\|_{l, \Omega}. \quad (2.18)$$

□

Ausgehend von Abschätzung (1.6) schließt sich damit der Kreis. Die rechte Seite der Fehlerabschätzung lautet mit nun bekannten Normen und h -Potenzen für $v \in H^l(\Omega)$:

$$\|\nabla e_h\| \leq \left(\sum_{T \in \Omega_h} \|v - \mathcal{Z}_h v\|_{1, T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq h^{l-1} \|v\|_{l, \Omega}. \quad (2.19)$$

Literatur

- [1] R. Rannacher. *Numerische Mathematik 2 (Numerik Partieller Differentialgleichungen) - Vorlesungsskript*. Universität Heidelberg, 2008.
- [2] R. Rannacher. *Analysis 2 - Vorlesungsskript*. Universität Heidelberg, 2010.
- [3] T. Richter. *Die Finite Elemente Methode für partielle Differentialgleichungen - Vorlesungsskript*. Universität Heidelberg, 2011.
- [4] R. Scott and S. Zhang. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Mathematics of Computation*, 54(190):483–493, 1990.