Universität Heidelberg
Dr. Dietmar Gallistl, Stefan Meggendorfer

Abgabe: **26.10.2017**

# Übung Nr. 1
# zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2017/18

## Aufgabe 1.1: Maschinenzahlen und das Assoziativgesetz

Sie haben einen Computer mit Dezimaldarstellung und einer Mantissenlänge von 3 Stellen, das heißt, jede Zahl hat die Form $0.m_1m_2m_3 \cdot 10^a$. Dabei ist die Rundungsvorschrift rd für eine Zahl in Dezimaldarstellung $x = \pm 0.m_1m_2m_3m_4 \cdots \cdot 10^a$ mit $m_j \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ und $m_1 \neq 0$ gegeben durch

$$\mathrm{rd}(x) = \pm \begin{cases} 0.m_1m_2m_3 \cdot 10^a & \text{falls } m_4 \leq 4 \\ (0.m_1m_2m_3 + 0.001) \cdot 10^a & \text{falls } m_4 \geq 5 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Gleitkommaoperationen

$$0.001 \oplus \big(\mathrm{rd}(\pi) \ominus \mathrm{rd}(\pi)\big) \quad \text{und} \quad \big(0.001 \oplus \mathrm{rd}(\pi)\big) \ominus \mathrm{rd}(\pi)$$

Berechnen Sie die absoluten und relativen Fehler in beiden Fällen.

## Aufgabe 1.2: Konditionierung der Inversen

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung, die im Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ umkehrbar ist. Die relativen Konditionszahlen von $f$ bei $x$ werden in der Matrix $K_x(f) = (\kappa_{ij})_{i,j=1}^n$ zusammengefasst. Ebenso werden die relativen Konditionszahlen der inversen Abbildung $f^{-1}$ bei $y = f(x)$ in der Matrix $K_y(f^{-1})$ zusammengefasst. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass alle Komponenten von $x$ und $y$ von 0 verschieden sind. Zeigen Sie $K_y(f^{-1}) = (K_x(f))^{-1}$.

## Aufgabe 1.3: Ermittlung der Maschinengenauigkeit

Geben Sie ein Verfahren an, mit dem sich die Maschinengenauigkeit `eps` eines Rechners experimentell ermitteln lässt.

## Aufgabe 1.4: Diskretisierungsfehler

Die Ableitung $f'(x)$ kann durch die Diffrenzenquotienten

$$d_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{und} \quad D_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

approximiert werden. Benutzen Sie Taylorentwicklung unter der Annahme, dass $f \in C^\infty(]x-2h, x+2h[)$, um eine Abschätzung des Diskretisierungsfehlers von der Form

$$|f'(x) - d_h(x)| = \mathcal{O}(h^\alpha) \quad \text{bzw.} \quad |f'(x) - D_h(x)| = \mathcal{O}(h^\alpha)$$

zu erhalten. Bestimmen Sie in beiden Fällen den höchsten Koeffizienten $\alpha$.

## Aufgabe 1.5: Bonusaufgabe: Konditionierung und Rundungsfehler

Wir betrachten die Funktion:

$$f(x) = x^3 \left( \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x} \right).$$

**(a)** Man bestimme die Konditionszahl der Funktionsauswertung. Für welche Argumente $x$ ist die Funktion gut, für welche schlecht konditioniert?

**(b)** Man werte $f(x)$ für $x = 1.4 \cdot 10^2$ bei vierstelliger Arithmetik (im Dezimalsystem) nach dem folgenden Verfahren aus:

$$\begin{aligned} a_1 &= x^2 \\ a_2 &= a_1 - 1 \\ a_3 &= x/a_2 \\ a_4 &= 1/x \\ a_5 &= a_3 - a_4 \\ a &= x^3 a_5 \end{aligned}$$

**(c)** Man schlage ein "stabileres" Verfahren zur Auswertung von $f(x)$ vor und wiederhole die Rechnung in der vorherigen Teilaufgabe. Man bestimme wieder absoluten sowie relativen Fehler.

**Jede Aufgabe 4 Punkte.**