Universität Heidelberg
Dr. Dietmar Gallistl, Stefan Meggendorfer

Abgabe: **02.11.2017**

Übung Nr. 2
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2017/18

Aufgabe 2.1: Normen

Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$.

(a) Zeigen Sie für alle $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$ die sogenannte "umgekehrte Dreiecksungleichung" $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$ und folgern Sie, dass $\|\cdot\|$ eine stetige Abbildung ist.

(b) Es bezeichne $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_2 = 1\}$ die euklidische Einheitssphäre. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\| : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ ihr Maximum und ihr Minimum annimmt. Folgern Sie, dass positive Konstanten c, C existieren mit

$$\forall x \in \mathbb{K}^n : \quad c\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C\|x\|_2.$$

(c) Zeigen Sie: Falls eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|$ konvergiert, dann auch bezüglich jeder anderen Norm auf $\mathbb{K}^n$.

Aufgabe 2.2: Euklidische Vektorräume

(a) Es sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto \langle x, x\rangle^{1/2}$ eine Norm ist.

(b) Zeigen Sie: Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann hermitesch, wenn für alle $(x, y) \in (\mathbb{K}^n)^2$ die Identität $\langle Ax, y\rangle_2 = \langle x, Ay\rangle_2$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die Frobenius-Norm $\|A\|_{\mathrm{F}} := \left(\sum_{j,k=1}^n |A_{jk}|^2\right)^{1/2}$ mit der euklidischen Norm verträglich ist und dennoch für $n \geq 2$ nicht die zu $\|\cdot\|_2$ zugehörige natürliche Matrixnorm ist (ein Gegenbeispiel für $n = 2$ reicht).

Aufgabe 2.3: Spaltensummennorm

Zeigen Sie, dass die "Spaltensummennorm" $\|A\|_1 := \max_{1\leq k\leq n} \sum_{j=1}^n |A_{jk}|$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ die zur ℓ^1-Norm $\|\cdot\|_1$ zugehörige Operatornorm (natürliche Matrizennorm) ist.

Aufgabe 2.4: Konditionszahl

Es bezeichne $X := \mathrm{GL}(\mathbb{R}, n) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen. Wir betrachten die Abblidung

$$\mathrm{inv} : X \to X \quad A \mapsto A^{-1}$$

und eine Matrizennorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Es seien $A \in X$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Beweisen Sie

$$(A + B) \in X \quad \text{und} \quad (A + B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-A^{-1}B)^k A^{-1}. \qquad (\textit{Hinweis:} \text{ Neumannsche Reihe}).$$

(b) Es sei $A \in X$. Zeigen Sie: Die Abbildung inv ist bei A differenzierbar und die Ableitung bei A ist gegeben durch

$$D(\mathrm{inv})|_A B = -A^{-1}BA^{-1} \quad \text{für alle } B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Hinweis: Zeigen Sie $\|(A + B)^{-1} - (A^{-1} - A^{-1}BA^{-1})\| = o(\|B\|)$ für $\|B\| \to 0$.

(c) In Anlehnung an Kapitel 1 der Vorlesung definieren wir die relative Kondition von inv bei A durch

$$\kappa_A(\mathrm{inv}) := \|D(\mathrm{inv})|_A\| \frac{\|A\|}{\|\mathrm{inv}(A)\|}.$$

Zeigen Sie $\kappa_A(\mathrm{inv}) \leq \mathrm{cond}(A)$.

Hinweis: Die Operatornorm einer Abbildung $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert durch $\|F\| := \sup_{B\in\mathbb{R}^{n\times n}\setminus\{0\}} \frac{\|FB\|}{\|B\|}$

Jede Aufgabe 4 Punkte.