Universität Heidelberg
Dr. Dietmar Gallistl, Stefan Meggendorfer

Abgabe: **09.11.2017**

Übung Nr. 3
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2017/18

Aufgabe 3.1: Matrizen

Beweisen Sie:

- Für eine reguläre obere rechte Dreiecksmatrix R ist R^{-1} wieder von dieser Gestalt.
- Für eine untere linke rechte Dreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonalen ist L^{-1} wieder von dieser Gestalt.
- Die Inverse G^{-1} der Frobenius Matrix

$$G = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \alpha_1 & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \alpha_\ell & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{erfüllt} \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -\alpha_1 & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\alpha_\ell & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3.2: Gauß-Elmination, LR-Zerlegung, lineare Algebra

(a) Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des folgenden LGS mithilfe der Gauß-Elimination

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 18 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(b) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie eine LR-Zerlegung von A der Form $A = LR$ (also mit $P = I$), sofern diese existiert.

(c) Zeigen Sie $\det L = 1$ und berechnen Sie die Determinante von A.

(d) Es ist bekannt, dass $\lambda = 6$ ein Eigenwert von A ist. Bestimmen Sie die übrigen Eigenwerte von A, ohne das charakteristische Polynom zu berechnen.

Aufgabe 3.3: Operatornorm

Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$. Beweisen Sie:

(a) Durch $\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ ist eine mit der Vektornorm $\|\cdot\|$ verträgliche Matrizennorm auf $\mathbb{K}^{n \times n}$ erklärt.
Bemerkung: Diese Norm heißt "natürliche Matrizennorm" oder auch "Operatornorm".

(b) Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Wir betrachten die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$. Zeigen Sie, dass für die natürliche Matrizennorm gilt

$$\|A\|_2 = \|A^*\|_2.$$

Aufgabe 3.4: Komplexität der Gauß-Elimination

Zeigen Sie, dass für die Gauß-Elimination von n-dimensionalen regulären Matrizen

$$\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$$

arithmetische Operationen ausreichen.

Hinweis: Die Formel $\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n(n+1)(2n+1))/6 = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$ kann an geeigneter Stelle verwendet werden.

Jede Aufgabe 4 Punkte.