Mathematikvollversammlung am 29. November 2017

Beginn 14 Uhr c.t., INF 205 (Mathematikon), PC-Pools 1 und 2
Unsere Fachschaft diskutiert und beschließt u.A. wie durch ihre ausführenden Organe Einfluss auf Studium und Lehre im Sinne der Studierenden genommen werden soll. Wir veranstalten deshalb zum ersten Mal die MatheVV, bei der die anwesenden Studis über aktuelle Themen aus Studium und Lehre diskutieren. In die Diskussion sollen Themen einfließen, die Deine aktuelle Studiensituation betreffen. Diese Möglichkeit bietet dir die kommende MatheVV, in deren Anschluss eine reine Mathematik-Fachschaftssitzung stattfindet. Dort hast Du mit deiner Anwesenheit automatisch Stimmrecht. Entscheide mit über Dein Studium und nutze Deine Stimme! Wir sorgen für Getränke während der Veranstaltung und im Anschluss treffen wir uns mit den Studis der Physik- und Informatikvollversammlungen zu Punsch und Keksen.

Mehr Infos unter: mathphys.info/w/mathevv_ws17
Ihr findet uns auch auf Twitter als @MathPhysInfo
und Facebook unter fb.com/fachschaft.mathphysinfo

Universität Heidelberg
Dr. Dietmar Gallistl, Stefan Meggendorfer

Abgabe: **30.11.2017**

Übung Nr. 6
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2017/18

Aufgabe 6.1: Iterative Löser

Untersuchen Sie für die folgenden beiden Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

ob die Jacobi- oder die Gauß-Seidel-Iteration (für die Lösung von $A_j x = b$) konvergent ist.

Hinweis: Schätzen Sie den Spektralradius der Iterierten ab oder wenden Sie die Konvergenzkriterien aus der Vorlesung an.

Aufgabe 6.2: Kondition von s. p. d. Matrizen

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie

(a) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn λ^2 Eigenwert von A^*A ist.

(b) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn λ^{-1} Eigenwert von A^{-1} ist.

(c) Es ist $\|A\|_2 = \lambda_{\max}$ für den betragsgrößten Eigenwert $\lambda_{\max}$ von A.

(d) Es ist $\operatorname{cond}_2(A) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, wobei $\lambda_{\min}$ den betragskleinsten Eigenwert von A bezeichnet.

Aufgabe 6.3: Lemma von Kantorowitsch

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit mit Eigenwerten $0 < \lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$ und $\kappa := \operatorname{cond}_2(A)$. Beweisen Sie:

(a) Es sei $\mu := \sqrt{\lambda_1\lambda_n}$. Dann gilt für alle $n \in \{1, \dots, n\}$

$\kappa^{-1/2} \le \lambda_j/\mu \le \kappa^{1/2}$ und $\lambda_j/\mu + \mu/\lambda_j \le \kappa^{1/2} + \kappa^{-1/2}$ (*Hinweis:* Monotonieeigenschaften von $z \mapsto z + z^{-1}$).

(b) Die Eigenvektoren von $\mu^{-1}A + \mu A^{-1}$ sind diejenigen von A. Die zugehörigen Eigenwerte sind höchstens $\kappa^{1/2} + \kappa^{-1/2}$.

(c) Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt

$$\mu^{-1}\langle x, Ax\rangle_2 + \mu\langle x, A^{-1}x\rangle_2 \le (\kappa^{1/2} + \kappa^{-1/2})\|x\|_2^2 \quad (\textit{Hinweis: } \text{Aufgabe 6.1}).$$

(d) Für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\quad \dfrac{\langle x, Ax\rangle_2\langle x, A^{-1}x\rangle_2}{\|x\|_2^4} \le \left(\dfrac{1}{2}\kappa^{1/2} + \dfrac{1}{2}\kappa^{-1/2}\right)^2.$

Hinweis: Zeigen Sie ggf. zunächst $4ab \le (|a| + |b|)^2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6.4: Konvergenz des Gradientenverfahrens

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s.p.d, $b \in \mathbb{R}^n$ und $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle_2 - \langle x, b\rangle_2$. Mit $x_\star$ sei die Lösung von $Ax_\star = b$ bezeichnet; $x^{(k)}$ seien die Iterierten des Gradientenverfahrens und $d_k = -\nabla f(x^{(k)})$. Beweisen Sie:

(a) Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt $f(x) = f(x_\star) + \frac{1}{2}\|x - x_\star\|_A^2$.

(b) Es gilt $f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)}) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\|d_k\|_2^4}{\langle d_k, Ad_k\rangle_2}$.

(c) Es gelten die Identitäten $d_k = -A(x_k - x_\star)$ und $\|x^{(k)} - x_\star\|_A^2 = \langle d_k, A^{-1}d_k\rangle_2$ sowie

$$\|x^{(k+1)} - x_\star\|_A^2 = \|x^{(k)} - x_\star\|_A^2 - \frac{\|d_k\|_2^4}{\langle d_k, Ad_k\rangle_2}, \quad \text{und} \quad \|x^{(k+1)} - x_\star\|_A^2 = \|x^{(k)} - x_\star\|_A^2\left[1 - \frac{\|d_k\|_2^4}{\langle d_k, Ad_k\rangle_2\langle d_k A^{-1}d_k\rangle_2}\right].$$

(d) Das Gradientenverfahren erfüllt die Fehlerabschätzung (*Hinweis:* Kantorowitsch-Lemma)

$$\|x^{(k)} - x_\star\|_A \le \left(\frac{\operatorname{cond}_2(A) - 1}{\operatorname{cond}_2(A) + 1}\right)^k \|x^{(0)} - x_\star\|_A.$$

Jede Aufgabe 4 Punkte.