Universität Heidelberg
Dr. Dietmar Gallistl, Stefan Meggendorfer

Abgabe: **07.12.2017**

Übung Nr. 7
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2017/18

Aufgabe 7.1: Begleitmatrix

Zu einem gegebenen normierten Polynom der Form $p(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j$ mit $\alpha_n = 1$ mit Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ heißt die Matrix

$$A(p) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

die *Frobenius-Begleitmatrix* von p. Beweisen Sie, dass die n Nullstellen von p genau die Eigenwerte von $A(p)$ sind.

Aufgabe 7.2: Lokalisierung von Eigenwerten

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 12 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Beweisen Sie

(a) Für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gilt $|\lambda| \leq 15$.

(b) Die Eigenwerte von A liegen in der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 3\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z-8| \leq 2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z-12| \leq 2\}$.

(c) Die Eigenwerte von A liegen in der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z-8| \leq 2\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z-12| \leq 2\}$.

(d) Der betragskleinste Eigenwert von A ist reell und liegt im Intervall $[2, 4]$.

Aufgabe 7.3: QR-Zerlegung

Es sei $\left(A^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge regulärer Matrizen in $\mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = I_{n\times n}$ (Einheitsmatrix). Es seien für jedes $k \in \mathbb{N}$ jeweils QR-Zerlegungen $A^{(k)} = Q^{(k)}R^{(k)}$ gegeben. Beweisen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} Q^{(k)} = I_{n\times n}$ und $\lim_{k\to\infty} R^{(k)} = I_{n\times n}$.

Aufgabe 7.4: QR mit Hessenberg-Matrizen

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine obere Hessenberg-Matrix mit QR-Zerlegung $A = QR$. Zeigen Sie, dass $\tilde{A} := RQ$ wieder eine obere Hessenberg-Matrix ist.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass die QR-Zerlegungen mit dem Householder-Algorithmus erzeugt worden sind.

Erinnerung: A heißt obere Hessenberg-Matrix, wenn für alle $(j,k) \in \{1,\dots,n\}^2$ mit $k \leq j+2$ gilt $A_{jk} = 0$.

Jede Aufgabe 4 Punkte.