Universität Heidelberg
Dr. Dietmar Gallistl, Stefan Meggendorfer

Abgabe: **11.01.2018**

Übung Nr. 10
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2017/18

Aufgabe 10.1: Polynomnullstellen

Es sei $p \in P_n$ ein komplexes Polynom vom Grade n mit führendem Koeffizienten 1. Für die Menge $G \subseteq \mathbb{C}^n$ der komplexen n-Tupel mit paarweise verschiedenen Einträgen und einen Startwert $z^{(0)} \in G$ wird das komplexe Polynom $\omega(z^{(k)}) \in P_n$ definiert als das Produkt aller Linearfaktoren

$$\omega(z^{(k)})(\zeta) = \prod_{j=1}^{n} (\zeta - z_j^{(k)})$$

für die aktuelle Näherung $z^{(k)} = (z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)})$ im Schritt k. Diese wird wie folgt konstruiert. Es seien $L_1, \dots, L_n : P_{n-1} \to \mathbb{C}$ linear unabhängige lineare Funktionale (also linear unabhängige Elemente des Dualraums von P_{n-1}) gegeben. Definiere

$$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad f(z) := (L_1(p - \omega(z)), \dots, L_n(p - \omega(z)))$$

(man beachte $p - \omega(z) \in P_{n-1}$). Dann setzt man

$$w^{(k)} := Df(z^{(k)})^{-1} f(z^{(k)}) \quad \text{und} \quad z^{(k+1)} := z^{(k)} - w^{(k)}.$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungsmatrix $Df(z^{(k)})$ und zeigen Sie, dass diese regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Aufdatierung $w^{(k)}$ mit den sog. "Weierstraß-Korrektoren" übereinstimmt, also

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \qquad w_j^{(k)} = \frac{p(z_j^{(k)})}{\prod_{\ell \neq j} (z_j^{(k)} - z_\ell^{(k)})}.$$

(*Bemerkung:* Dies zeigt, dass das Weierstraß-Verfahren zur simultanen Berechnung aller einfachen Nullstellen eines Polynoms ein Newton-Verfahren und damit lokal quadratisch konvergent ist).

Erinnerung: Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass $q \in P_{n-1}$ genau dann null ist, wenn q im Kern n linear unabhängiger linearer Funktionale ist.

Aufgabe 10.2: Divergente Newton-Iteration

Konstruieren Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Newton-Iterierte zyklisch die Werte $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ und jeweils die Funktionswerte $y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 1$ annimmt.

Aufgabe 10.3: Gauß-Newton-Verfahren

Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $m \geq n$ gegeben. Die Suche nach einer verallgemeinerten Lösung der überbestimmten Gleichung $F(x) = 0$ führt auf das nichtlineare Problem

$$\text{minimiere } g(x) := \|F(x)\|_2^2 \quad \text{über } \mathbb{R}^n.$$

(a) Zeigen Sie: das Minimum $x_\star$ löst $DF(x_\star)^* F(x_\star) = 0$.

(b) Geben Sie das Newton-Verfahren (basierend auf dieser notwendigen Bedingung) zur Lösung dieses Problems an unter Vernachlässigung der zweiten Ableitung D^2F.

(c) Schreiben Sie das Newton-Verfahren unter Verwendung der Pseudoinversen $DF(x^{(k)})^+$.

(d) Zeigen Sie, dass im Falle $m = n$ wieder das klassische Newton-Verfahren ensteht.

(e) Zeigen Sie, dass im Falle einer linearen Abbildung $F(x) = Ax - b$ die Gaußsche Normalgleichung zurückgewonnen wird.

Jede Aufgabe 16/3 Punkte.