Universität Heidelberg
Dr. Dietmar Gallistl, Stefan Meggendorfer

Abgabe: **18.01.2018**

Übung Nr. 11
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2017/18

Aufgabe 11.1: Leibniz-Formel für dividierte Differenzen

(a) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen und $x_0, \ldots x_k \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Punkte. Zeigen Sie, dass die dividierten Differenzen der Funktion $\varphi := fg$ folgende Formel erfüllen

$$\varphi[x_0, \ldots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} f[x_0, \ldots, x_j] g[x_j, \ldots, x_k].$$

(b) Es seien $x_0, \ldots x_k > 0$ paarweise verschiedene positive Zahlen. Berechnen Sie die k-te dividierte Differenz $f[x_0, \ldots, x_k]$ der Funktion $f(x) = 1/x$.

Aufgabe 11.2: Neville-Algorithmus

Am 21. Dezember 2017 wurden folgende Tageslängen gemessen

Ort	Tageslänge	Lage
Berlin	7h39m	$52,5°$N
Rom	9h07m	$41,9°$N
Helsinki	5h49m	$60,2°$N
Minsk	7h23m	$53,9°$N
Marseille	8h58m	$43,3°$N

Bestimmen Sie die Tageslänge in Heidelberg ($49,4°$N) druch Auswertung des zugehörigen Interpolationspolynoms mit Hilfe des Neville-Algorithmus.

Bemerkung: Wenn Sie von Hand rechnen, reicht vierstellige Dezimalrechnung.

Aufgabe 11.3: Approximation

Bestimmen Sie das approximierende Polynom p zur Funktion

$$f(x) = |x|, \quad -2 \leq x \leq 2$$

(a) durch Lagrange-Interpolation in P_4 zu den Stützstellen $x_j = -2 + j, j \in \{0, \ldots, 4\}$.

(b) durch Ausgleichsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate), indem Sie bezüglich der Stützstellen $x_j = -2 + j/2$, $j \in \{0, \ldots, 8\}$ ein Polynom aus P_2 bestimmen.

Skizzieren Sie den jeweiligen Funktionsverlauf und vergleichen Sie den Approximationsfehler im Punkt $x = 1/3$. Wie verändert sich Aufgabenteil (b), wenn p in P_3 gesucht ist? (Um die letzte Frage zu beantworten, müssen Sie nicht explizit rechnen.)

Aufgabe 11.4: Hermite-Interpolation

Gegeben sei eine ℓ-fach stetig differenzierbare Funktion f. Zu paarweise verschiedenen Knoten $x_0, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ mit $\mu_0, \ldots, \mu_m \in \{0, \ldots, \ell\}$ ist ein Polynom $p \in P_n$ gesucht mit $n = m + \sum_{j=0}^{m} \mu_j$ und

$$\forall j \in \{0, \ldots, m\} \forall k \in \{0, \ldots, \mu_j\} \quad p^{(k)}(x_j) = f^{(k)}(x_j)$$

(hier bezeichnet $g^{(k)}$ die k-te Ableitung einer Funktion g). Zeigen-Sie, dass diese Interpolationsaufgabe eindeutig lösbar ist.

Jede Aufgabe 4 Punkte.