Universität Heidelberg
Dr. Dietmar Gallistl, Stefan Meggendorfer

Abgabe: **25.01.2018**

Übung Nr. 12
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2017/18

Aufgabe 12.1: Extrapolation Für die Funktion $f(x) = \sinh(x)$ ist folgende Wertetabelle gegeben

x	0.52	0.56	0.60	0.64	0.68
$f(x)$	0.54375355	0.58973171	0.63665358	0.68459422	0.73363036

Betrachten Sie die drei möglichen Differenzenquotienten

$$a(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad a(h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad a(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

und bestimmen Sie jeweils ein möglichst großes q derart, dass $a(h) = f'(x) + a_1 h^q + a_2(h) h^{2q}$ mit Koeffizienten a_1, a_2 und $a_2(h) = a_2 + o(1)$ für $h \to 0$. Bestimmen Sie jeweils durch Richardson-Extrapolation die entsprechenden Approximationen an $f'(0.6)$. Bestimmen Sie eine Näherungsformel für $f''(x)$ und ermitteln Sie eine Näherung an $f''(0.6)$.

Aufgabe 12.2: Kubische Splines Es bezeichne S_0 den Raum der natürlichen kubischen Spline-Funktionen zu den Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$.

(a) Welche der folgenden Funktionen liegen in S_0?

$$\text{(i) } f(x) = x^3 - x^2, \quad \text{(ii) } f(x) = x^2(x-6) - (x-2)^3, \quad \text{(iii) } f(x) = \max\{0, x-1\}^3 - \frac{1}{2}x^3$$

(b) Bestimmen Sie den interpolierenden Spline $s_2 \in S_0$ für $f(x) = x^3$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürlichen Randbedingunen durch $s_2''(x_0) = f''(x_0)$ und $s_2''(x_2) = f''(x_2)$ ersetzt werden?

Aufgabe 12.3: Innenprodukt Wir betrachten den Raum $C([a,b])$ der stetigen Funktionen über dem Intervall $[a,b]$ und eine positive (reellwertige) Funktion $\omega \in C([a,b])$ mit $\omega > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass durch die Abbildung $C([a,b])^2 \ni (f,g) \mapsto \langle f, g\rangle_{L^2(a,b),\omega} \in \mathbb{C}$ mit $\langle f, g\rangle_{L^2(a,b),\omega} := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\omega(x)\,dx$ ein Skalarprodukt auf $C([a,b])$ erklärt ist.

(b) Beweisen Sie, dass durch $\|f\|_{L^2(a,b),\omega} = \langle f, f\rangle_{L^2(a,b),\omega}^{1/2}$ eine Norm auf $C([a,b])$ erklärt ist.

Hinweis: Skalarprodukte und Normen wurden in §2 der Vorlesung zunächst für $\mathbb{K}^n$ erklärt. Die Definitionen sind für den Raum $C([a,b])$ sinngemäß zu übernehmen.

Aufgabe 12.4: Gauß-Approximation Wir betrachten das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(a,b),\omega}$ aus Aufgabe 12.3. Es bezeichne wie üblich $P_n(a,b)$ den Raum der Polynome vom Grad $\leq n$ über $[a,b]$. Es sei $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ eine Basis von P_n und $A \in \mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)}$ definiert durch

$$A_{jk} = \langle \lambda_k, \lambda_j\rangle_{L^2(a,b),\omega}.$$

(a) Es seien $x, y \in \mathbb{K}^{n+1}$ Koeffizientenvektoren derart, dass $f, g \in C([a,b])$ die Darstellungen

$$f = \sum_{k=1}^{n+1} x_k \lambda_k \quad \text{und} \quad g = \sum_{j=1}^{n+1} y_j \lambda_j$$

besitzen. Beweisen Sie $\langle f, g\rangle_{L^2(a,b),\omega} = y^* A x$.

(b) Es sei $f \in C([a,b])$ gegeben und es sei $y \in \mathbb{K}^{n+1}$ definiert durch $y_j = \langle f, \lambda_j\rangle_{L^2(a,b),\omega}$ für jedes $j = 1, \ldots, n+1$. Zeigen Sie, dass jedes $p \in P_n(a,b)$ mit Koeffizientenvektor $x \in \mathbb{K}^{n+1}$ (also mit $p = \sum_{j=1}^{n+1} x_j \lambda_j$) erfüllt

$$\|f-p\|_{L^2(a,b),\omega}^2 = \min_{q \in P_n(a,b)} \|f-q\|_{L^2(a,b),\omega}^2 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \frac{1}{2}x^* A x - y^* x = \min_{z \in \mathbb{K}^{n+1}} \left(\frac{1}{2} z^* A z - \operatorname{Re}(z^* y)\right).$$

(c) Beweisen Sie, dass zu jedem $f \in C([a,b])$ ein eindeutiges $p \in P_n(a,b)$ existiert mit $\|f-p\|_{L^2(a,b),\omega} = \min_{q \in P_n(a,b)} \|f-q\|_{L^2(a,b),\omega}$ (betrachten Sie hier nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). (*Hinweis:* Aufgabe 5.3)

Jede Aufgabe 4 Punkte.