Universität Heidelberg
Dr. Dietmar Gallistl, Stefan Meggendorfer

Abgabe: **keine**

Übung Nr. 14
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2017/18

Aufgabe 14.1: Lokalisierung von Polynomnullstellen

Es sei $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ ein Polynom mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Beweisen Sie: Jede Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ von p erfüllt

$$|z| \leq \max\left\{ \frac{|a_0|}{|a_n|}, \max_{j=1,\ldots,n-1} \frac{1+|\alpha_j|}{|a_n|} \right\}.$$

Hinweis: Begleitmatrix aus Aufgabe 7.1.

Aufgabe 14.2: Quadratur

Es bezeichne $T = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0 \text{ und } x_1 + x_2 \leq 1\}$ das Einheitsdreieck aus $\mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten $z_1 = (1,0)$, $z_2 = (0,1)$, $z_3 = (0,0)$ und Schwerpunkt $M = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$. Für Polynome (in zwei Variablen) über T welchen Grades sind die folgenden Quadraturformeln exakt

(a) $I(f) = \dfrac{1}{2} f(z_1)$,

(b) $I(f) = \dfrac{1}{2} f(M)$,

(c) $I(f) = \dfrac{1}{6}\Big(f(z_1+z_2) + f(z_2+z_3) + f(z_3+z_1)\Big)$

(d) $I(f) = \dfrac{1}{3}\left(f\Big(\dfrac{z_1+z_2}{2}\Big) + f\Big(\dfrac{z_2+z_3}{2}\Big) + f\Big(\dfrac{z_3+z_1}{2}\Big)\right)$?

Aufgabe 14.3: Taylor-Formel

(a) Es sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $c > 0$. Zeigen Sie, dass für $x_\star \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_\star| \leq c$ gilt

$$|f(x) - f(x_\star)| \leq |x - x_0| \max_{x_\star - c \leq \xi \leq x_\star + c} f'(\xi).$$

(b) Es sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $c > 0$. Zeigen Sie, dass für $x_\star \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_\star) = 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_\star| \leq c$ gilt

$$|f(x) - f(x_\star)| \leq \frac{1}{2}|x - x_\star|^2 \max_{x_\star - c \leq \xi \leq x_\star + c} f''(\xi).$$

(c) Zeigen Sie, dass der zentrale Differenzenquotient

$$D_h f(x) := \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

die Ableitung wie folgt approximiert

$$|f'(x) - D_h f(x)| = O(h^2) \quad \text{für } h \to 0.$$

Aufgabe 14.4: Schnelle Fourier-Transformation Studieren Sie den FFT-Algorithmus aus der Vorlesung und machen Sie sich die Einzelnen Schritte einschließlich der Bit-Umkehr klar. Beweisen Sie, dass der Algorithmus lediglich $O(N \log_2 N)$ arithmetische Operationen erfordert, wobei $N = n + 1 = 2^p$ und n die Anzahl der Stützstellen bezeichnet.

Jede Aufgabe 4 Punkte.