Universität Heidelberg
Dr. Dietmar Gallistl, Stefan Meggendorfer

Programmierpraktikum Nr. 3
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Winter 2017/18

Vergleichen Sie die Genauigkeit verschiedener Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme, die in Octave implementiert sind. Es gibt die Funktion

`lu` für die LR-Zerlegung $A = LR$ und $A^{-1} = R^{-1}L^{-1}$ (Satz 4.2 im Skript) ,

`chol` für die Cholesky-Zerlegung $A = LL^T$ und $A^{-1} = L^{-T}L^{-1}$ (Satz 4.8 im Skript) als symmetrische Variante der LR-Zerlegung für symmetrische Matrizen,

`qr` für die QR-Zerlegung $A = QR$ und $A^{-1} = R^{-1}Q^T$ (Satz 4.10 im Skript) in eine unitäre Matrix Q und eine obere Dreiecksmatrix R,

`schur` für die Schurzerlegung $A = USU^T$ und $A^{-1} = US^{-1}U^T$ (Satz 7.5 im Skript) mit unitärer Matrix U und oberer Dreiecksmatrix S, und

`svd` für die Singulärwertzerlegung $U\Sigma V^T$ und $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$ (Satz 4.11 im Skript) mit unitären Matrizen U, V und der Diagonalmatrix mit den Singulärwerten Σ.

Alle diese Zerlegungen können zur Lösung von linearen Gleichungssystemen benutzt werden, da ihre Faktoren leicht invertierbar sind, nämlich

- L, R und S durch vorwärts/rückwärts Einsetzen,
- da $Q^{-1} = Q^T$ und dasselbe für U und V und
- Σ durch Teilen durch die Diagonalelemente.

Führen Sie die Aufgabe in folgenden Schritten durch:

(a) Schreiben Sie für jede dieser Methoden ein Programm, das die Zerlegung der Hilbertmatrix A der Dimension $n = 5$ berechnet. Funktion: `hilb(5)`.

(b) Wenden Sie diese Zerlegung auf die Lösung des Gleichungssystems $Ax = e_k$ mit $k = 1, \ldots, n$ an. Finden Sie dazu die geeigneten Funktionen in Octave.

(c) Das Ergebnis von Teil (b) ist die k-te Spalte der genäherten Matrix $\tilde{A}^{-1}$. Nutzen Sie Teil (b) zur Berechnung der Matrix $\tilde{A}^{-1}$.

(d) Berechnen Sie eine Norm Ihrer Wahl für die Differenz $\|A^{-1} - \tilde{A}^{-1}\|$. Die Matrix A^{-1} können Sie exakt mit der Funktion `invhilb` erhalten, Funktionen für diverse Matrizennormen sind ebenfalls verfügbar.