Übungen zur Linearen Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat
Dr. Dörte Beigel
Philipp Siehr

Blatt 7
Abgabetermin: Freitag, 05.12.2014, 11 Uhr

Aufgabe 7.1 (**Vektorräume über endlichen Körpern** - *3 + 1* Punkte*)
Sei K ein Körper mit $\#K = q \in \mathbb{N}$ Elementen und sei V ein K-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie die Mächtigkeit von V in Abhängigkeit von q und n.

b) Wie viele Untervektorräume der Dimension 0 gibt es in V?

c) Wie viele Untervektorräume der Dimension 1 gibt es in V?

d) Zusatzaufgabe für alle, denen c) Spass gemacht hat: Wie viele Untervektorräume der Dimension $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \geq n$ gibt es in V? Und wie viele mit $m < n$?

Lösung

a) In jeder der n Komponenten gibt es q Möglichkeiten. Damit ist $\#V = q^n$.

b) Ist $m = 0$, so gibt es nur den Nullraum als Untervektorraum.

c) Jeder 1-dimensionale Vektorraum besitzt eine Basis bestehend aus einem Vektor $\neq 0$. Umgekehrt liefert jeder Vektor aus $V \setminus \{0\}$ auch einen 1-dimensionalen UVR. Demnach hätte man $q^n - 1$ Untervektorräume. Das stimmt jedoch nicht ganz. Denn jeder Unterraum wird hierbei mehrfach gezählt. In jedem dieser Unterräume liegen q Vektoren, die auch in V liegen. Diese, bis auf die 0 im Unterraum, spannen ebenfalls denselben Unterraum auf. Daher gibt es

$$N(n, 1) = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Unterräume der Dimension 1.

d) Für $m = n$ gibt es genau einen Untervektorraum und für $m > n$ gibt es keine Untervektorräume. Für $n > 1$ ergibt sich die Anzahl der 2-dimensionalen Unterräume durch die Wahl von zwei linear unabhängigen Vektoren in V. Von diesen gibt es $(q^n - 1)(q^n - 1 - [q - 1]) = (q^n - 1)(q^n - q)$ Paare. Wie im Fall der 1-dimensionalen Unterräume wurden wieder einige Räume mehrfach gezählt. Denn jeder dieser Untervektorräume durch ein beliebiges Paar linear unabhängiger Vektoren daraus aufgespannt. Man kann $(q^2-1)(q^2-q)$ verschiedene Basisvektoren auswählen. Diese Zahl ist nichts anderes wie die Zahl der möglichen Basen des K^2. Für die Anzahl der 2-dimensionalen UVR ergibt sich damit die Formel:

$$N(n,2) = \frac{(q^n-1)(q^n-q)}{(q^2-1)(q^2-q)}.$$

Dieses Konstruktionsprinzip lässt sich entsprechend verallgemeinern auf $1 \leqslant m \leqslant n$. Der Zähler der folgenden Formel ist Anzahl von Möglichkeiten m linear unabhängige Vektoren in V zu wählen. Der Nenner ist die Anzahl der Möglichkeiten eine Basis in den Unterräumen zu wählen.

$$N(n,m) = \frac{(q^n-1)\cdot(q^n-q)\cdot\ldots\cdot(q^n-q^{m-1})}{(q^m-1)\cdot(q^m-q)\cdot\ldots\cdot(q^m-q^{m-1})}.$$

Aufgabe 7.2 (**Lineare Unabhängigkeit** - *3 Punkte*)
Zeigen Sie: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ sind im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ linear unabhängig.

Lösung (1)
Zunächst zeigen wir ein Lemma:
Sei $a \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}, b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, dass sind a und b linear unabhängig.

Beweis. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 a + \lambda_2 b = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \underbrace{b}_{\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = -\underbrace{\frac{\lambda_1 a}{\lambda_2}}_{\in\mathbb{Q}} \qquad \Rightarrow \lambda_1 = 0 \qquad \Rightarrow \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

□

Seien nun $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbb{Q}$ mit:

$$\lambda_1 1 + \lambda_2\sqrt{2} + \lambda_3\sqrt{3} + \lambda_4\sqrt{6} = 0. \tag{7.1}$$

1. Gleichung (7.1) lässt sich umschreiben zu:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 + \lambda_2\sqrt{2} = -(\lambda_3\sqrt{3} + \lambda_4\sqrt{6}) \\ \Rightarrow \quad & (\lambda_1 + \lambda_2\sqrt{2})^2 = (\lambda_3\sqrt{3} + \lambda_4\sqrt{6})^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2\sqrt{2} + 2\lambda_2^2 = 3\lambda_3^2 + 6\lambda_3\lambda_4\sqrt{2} + 6\lambda_4^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = (\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 - 3\lambda_3^2 - 6\lambda_4^2)\cdot 1 + (2\lambda_1\lambda_2 - 6\lambda_3\lambda_4)\cdot\sqrt{2} \end{aligned}$$

Da 1 und $\sqrt{2}$ linear unabhängig sind (Lemma) gilt:

$$\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 = 3\lambda_3^2 + 6\lambda_4^2 \tag{7.2}$$

$$\text{und} \quad 2\lambda_1\lambda_2 = 6\lambda_3\lambda_4 \tag{7.3}$$

2. Analog zu 1. gilt:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 + \lambda_4\sqrt{6} = -(\lambda_2\sqrt{2} + \lambda_3\sqrt{3}) \\ \Rightarrow \quad & (\lambda_1 + \lambda_4\sqrt{6})^2 = (\lambda_2\sqrt{2} + \lambda_3\sqrt{3})^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_4\sqrt{6} + 6\lambda_4^2 = 2\lambda_2^2 + 2\lambda_2\lambda_3\sqrt{6} + 3\lambda_3^2 \end{aligned}$$

Sortiert man nach 1 und $\sqrt{6}$ ergibt sich:

$$\lambda_1^2 + 6\lambda_4^2 = 2\lambda_2^2 + 3\lambda_3^2 \tag{7.4}$$

$$\text{und} \qquad 2\lambda_1\lambda_4 = 2\lambda_2\lambda_3 \tag{7.5}$$

Auflösen von (7.2) und (7.4) nach $6\lambda_4^2 - 2\lambda_2^2$ und Gleichsetzen liefert:

$$\begin{aligned} & \lambda_1^2 - 3\lambda_3^2 = 3\lambda_3^2 - \lambda_1^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1^2 - 3\lambda_3^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 = \pm\sqrt{3}\lambda_3. \end{aligned}$$

Da aber $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ gilt: $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$.
Analog: Auflösen von (7.2) und (7.4) nach $3\lambda_3^2 - \lambda_1^2$ und Gleichsetzen liefert:

$$\begin{aligned} & 2\lambda_2^2 - 6\lambda_4^2 = 6\lambda_4^2 - 2\lambda_2^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_2^2 - 3\lambda_4^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_2 = \pm\sqrt{3}\lambda_4. \end{aligned}$$

Da aber $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ gilt: $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$.

Lösung (2)
Eleganter mit $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Seien wieder $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbb{Q}$ mit:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 1 + \lambda_2\sqrt{2} + \lambda_3\sqrt{3} + \lambda_4\sqrt{6} \\ &= \lambda_1 + \lambda_2\sqrt{2} + (\lambda_3 + \lambda_4\sqrt{2})\sqrt{3} \\ &=: \alpha + \beta\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Falls $\beta = 0$, so ist ebenfalls $\alpha = 0$. Nun verwendet man, dass 1 und $\sqrt{2}$ linear unabhängig sind (Lemma). Dann folgt direkt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
Falls $\beta \neq 0$ gilt $\beta \in (\mathbb{Q}(\sqrt{2}))^\times$. Denn $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist ein Körper, also besitzt jedes Element außer 0 ein Inverses. Damit gilt: $\sqrt{3} = -\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Also existieren $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ $(\star)$.
Da $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ gilt $b \neq 0$. Und mit $\mathbb{Q} \not\ni \frac{1}{2}\sqrt{6} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} + b$ gilt auch $a \neq 0$.
Quadriert man nun $(\star)$, so gilt $3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2$. Demnach wäre $\sqrt{2}$ rational. Dies ist ein Widerspruch und somit kann Fall $\beta \neq 0$ nicht auftreten.

Aufgabe 7.3 (**Erzeugnis** - *2 Punkte*)
Welche Dimension hat der von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, wobei $t \in \mathbb{R}$ ist? Für welche Werte von t sind die Vektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

Lösung
Die beiden Vektoren $(1, 2, t+2)$ und $(0, t, 1)$ sind für alle t linear unabhängig, daher ist die Dimension des Erzeugnisses mindestens 2. Der Vektor $(-1, t+1, t)$ ist genau dann eine Linearkombination der anderen beiden, wenn $t = 1$ oder $t = -3/2$. In diesen Fällen ist die Dimension des Erzeugnisses 2, in allen anderen Fällen ist sie 3.

Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, -3/2\}$ sind sie ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 7.4 (**Untervektorraum** - *4 Punkte*)
Seien U und V Untervektorräume des K-Vektorraums W.

a) Wann ist die Vereinigung $U \cup V$ ein Untervektorraum von W?

b) Wann ist $U \cup V = \langle U, V \rangle$?

c) Wann ist $W \setminus U$ ein Untervektorraum?

Lösung

a) Behauptung: $V \cup U$ ist ein Vektorraum $\Leftrightarrow V \subset U$ oder $U \subset V$.
„$\Leftarrow$“ Im Fall $V \subset U$ ist $V \cup U = U$ und damit offensichtlich ein Vektorraum. Der Fall $U \subset V$ analog.
„$\Rightarrow$“ Ist $V \subset U$, so ist nichts zu zeigen. Angenommen $V \not\subset U$, zz: $U \subset V$ $(*)$.
Mit dieser Annahme gibt es $v \in V$ mit $v \notin U$.
Sei nun $u \in U$ beliebig. Es bleibt zu zeigen: $u \in V$ (siehe $(*)$).
Mit $u \in U \subset V \cup U$ und $v \in V \subset V \cup U$ und der Voraussetzung, dass $V \cup U$ ein Vektorraum ist, gilt $v + u \in V \cup U$.

Fall 1: $v + u \in W$.
Dann ist $v = (v + u) - u \in U$ ein Widerspruch zur Annahme $(*)$. Hier wurde verwendet, dass U ein Vektorraum ist.

Fall 2: $v + u \in V$.
Dann ist $u = (v + u) - v \in V$. Analog mit V ein Vektorraum ist.

Da $u \in U$ beliebig gilt $U \subset V$.

b) Behauptung: $V \cup U = \langle U, V \rangle \Leftrightarrow U \subset V$ oder $V \subset U$.
„$\Leftarrow$“ Sei $U \subset V$, dann ist $U \cup V = V$ und $\langle V, U \rangle = \langle V \rangle = V$. Also ist $V \cup U = \langle U, V \rangle$.
Die zweite Aussage ist in Satz 1.4.5 aus der Vorlesung.

Für den Fall $V \subset U$ analog.
„$\Rightarrow$“ Nach der Vorlesung (Satz 1.4.5) ist $\langle U, V \rangle$ ein Untervektorraum. Nach Voraussetzung ist dann auch $U \cup V$ ein Untervektorraum. Nach Aufgabenteil a) folgt direkt die Behauptung.

c) Für jeden UVR U gilt $0 \in U$. Dann ist $0 \notin W \setminus U$ und somit kann $W \setminus U$ kein VR mehr sein, also auch kein UVR.

Aufgabe 7.5 (**Direkte Summe** - *4 Punkte*)
Betrachten Sie folgende Mengen:

$$\begin{aligned}
V &= \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \\
U &= \{f \in V : f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}, \\
G &= \{f \in V : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass U und G Untervektorräume von V sind. Welche Bedeutung haben die Räume U und G ?

b) Zeigen Sie: $U \oplus G = V$. Was bedeutet dies für eine Funktion $f \in V$?

Hinweis: Es handelt sich hierbei um unendlich dimensionale Räume. Sie können daher keine Basis wählen, sondern müssen sich für ein beliebiges $f \in V$ ein geeignetes $u \in U$ und $g \in G$ konstruieren.

Lösung

a) Zunächst gilt $0 \in U$ und $0 \in G$ (klar) und auch $U, G \subset V$. Sei also $u, u' \in U, g, g' \in G$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(\lambda u + u')(-x) &= \lambda u(-x) + u'(-x) = \lambda(-u(x)) - u'(x) \\
&= -(\lambda u(x) + u'(x)) = -(\lambda u + u')(x) \\
&\Rightarrow \lambda u + u' \in U, \\
(\lambda g + g')(-x) &= \lambda g(-x) + g'(-x) = \lambda g(x) + g'(x) \\
&= (\lambda g + g')(x) \\
&\Rightarrow \lambda g + g' \in G.
\end{aligned}$$

Demnach sind U und G reelle Untervektorräume.

b) Sei $f \in U \cap G$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt $-f(x) = f(-x) = f(x)$ und somit $f = 0$, da x beliebig. Also ist $U \cap G = \{0\}$.
Es bleibt noch zu zeigen, dass sich jedes $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ als $u + g$ darstellen lässt. Wir definieren für ein beliebiges $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned}
u &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\
g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))
\end{aligned}$$

Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(-x) &= \tfrac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -u(x), \\ g(-x) &= \tfrac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = \quad \tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = g(x). \end{aligned}$$

Also ist $u \in U$ und $g \in G$. Zudem gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$u(x) + g(x) = \tfrac{1}{2}(f(-x) - f(x)) + \tfrac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = f(x).$$

Demnach ist $u + g = f$. Da dies für ein beliebiges $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gilt, folgt somit $U + G = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
(Genauer folgt hier eigentlich erst, dass $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset U + G$. Da es sich bei U und G um UVR handelt gilt auch $\supset$.)